PHYSIK I

Eine Einführungsvorlesung für Naturwissenschaftler
Gehalten von Prof. Dr. Danilo Pescia an der ETH Zürich.
Redaktion: Vincent Kräutler und Urs Zimmerli

Vorwort

Die Vorlesung ”Physik I”, die ich im Wintersemester für die Studenten der Abteilung Chemie, Lebensmittelwissenschaft, Biologie, Erdwissenschaften und Umweltwisswenschaften der ETH Zürich gelesen habe, behandelt einige wichtige Themen aus der ”klassischen Mechanik” und der ”statistischen Physik”. Mein Ziel war es, durch das Studium dieser klassischen Gebiete der Physik einen Einblick in moderne Vorgänge der Atom-, Molekül- und Festkörperphysik zu geben, soweit diese rein klassischen Ursprungs sind. In dieser Vorlesung wird berücksichtigt, dass die Physikroutine systematisch Konzepte aus der der Mathematik benutzt. Das geschieht nicht nur um physikalische Inhalte korrekt zu vermitteln, sondern trägt auch der Tatsache Rechnung, dass die Natur selbst eine faszinierende ”mathematische Struktur” besitzt, die in vielen alltäglichen Erscheinungen zum Vorschein kommt. Die notwendigen Werkzeuge aus der Mathematik werden jeweils bei Bedarf eingeführt, damit ihre Verbindung mit der physikalischen Fragestellung klar wird. Ich bedanke mich bei den vielen Studenten, die diese Vorlesung dank ihrer Aufmerksamkeit ermöglicht haben, bei den Assistenten, die die dazugehörigen Übungen geduldig ausgearbeitet haben, und bei den Herren V. Kräutler, U. Zimmerli, und U. Maier, sowie bei meiner Frau Hedi, die mein Skript druck- und webreif bearbeitet haben. Besonderer Dank geht an Herrn Prof. G. Soff, Institut für Theoretische Physik der TU Dresden: er stellte mir sein exzellentes Manuskript zur Verfügung, das mir sehr geholfen hat.
Zürich, im März 2000

Inhaltsverzeichnis

Vorwort **iii**

1 Die Bewegungsgleichungen **1**
1.1 Einführung 1
1.2 Das Hamilton-Prinzip 11
1.3 Einige wichtige Kräfte der Natur 18

2 Anwendungen der BG **21**
2.1 Eindimensionale Probleme 21
2.2 Das Zweikörper-Problem 24

3 Integrale der Bewegung und Symmetrien **31**
3.1 Erhaltung der Energie 32
3.2 Die Impulserhaltung 33
3.3 Die Drehimpulserhaltung 36
3.4 *Skaleninvarianz 37

4 Schwingungen **39**
4.1 Eindimensionale harmonische Schwingung 39
4.2 Erzwungene Schwingung 40
4.3 Die lineare schwingende Kette 51
4.4 Die Wellengleichung 54

Kapitel 1

Die Bewegungsgleichungen

1.1 Einführung

Eine der wichtigsten Erscheinungen der Natur ist die Bewegung. Bewegt sich ein Objekt über Abstände, die viel grösser als seine Ausdehnung sind, so kann dieses Objekt als Massenpunkt P betrachtet werden, d.h. ein geometrischer Punkt P, der eine Masse m hat, wobei m das einzige Merkmal ist, das Massenpunkte voneinander unterscheidet (Einheiten für die Masse: kg). Im Fall eines Massenpunktes kann dann seine endliche Ausdehnung für die Beschreibung der Bewegung vernachlässigt werden. Beispielsweise kann man für die Beschreibung der Umlaufbahn der Erde um die Sonne die Ausdehnung der Erde vernachlässigen – will man hingegen erklären, warum es Tag und Nacht gibt, muss man berücksichtigen, dass sich die Erde als Konsequenz ihrer endlichen Ausdehnung um ihre eigene Achse dreht. Die Lage des Massenpunktes in Bezug auf ein geeignetes Koordinatensystem beschreibt einen Ortsvektor $\vec{r}$, die Bahn von P eine *Vektorfunktion* $\vec{r}(t)$, wobei der reelle Parameter t die *Zeit* ist. (Einheiten für $|\vec{r}|, t$: m, sec)

Verschiedene Grössen in der Physik, wie zum Beispiel die Grundgrössen Länge, Masse und Zeit, können im Rahmen der Newtonschen Mechanik durch eine einzige reelle Zahl spezifiziert werden. Diese Zahl kann dabei von dem Einheitensystem abhängen, in dem wir die Messung vornehmen. Solche Grössen bezeichnen wir als Skalare. Ein Skalar wird durch einen Buchstaben angegeben, z.B. für die Zeit t und für die Masse m.

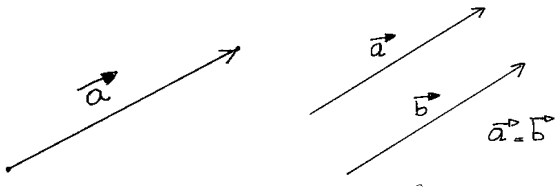


Abbildung 1.1: Vektor $\vec{a}$ (links). $\vec{a} = \vec{b}$ (rechts)

Andere Grössen in der Physik, wie die Ortsangabe oder die Geschwindigkeit bedürfen zu ihrer vollständigen Spezifikation der Angabe eines Betrages und einer Richtung. Solche Grössen nennen wir Vektoren und kennzeichnen sie durch einen Pfeil über den Buchstaben, um die Bedeutung der Richtungsangabe hervorzuheben. So schreiben wir beispielsweise für den Ortsvektor $\vec{r}$. Ein Vektor verbindet zwei Punkte, beispielsweise bezeichnen wir den Betrag oder die Länge eines Vektors $\vec{a}$ mit $|\vec{a}|$ oder a. Wir wollen nun die einfachen Gesetze der Vektoralgebra behandeln. Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind gleich, wenn sie den gleichen Betrag und die gleiche Richtung aufweisen unabhängig von ihrem Anfangspunkt. Einen Vektor, der die gleiche Länge wie der Vektor $\vec{a}$ aufweist, aber in die entgegengesetzte Richtung zeigt, bezeichnen wir mit $-\vec{a}$. Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ werden addiert, indem man durch Parallelverschiebung den Fusspunkt des einen Vektors $\vec{b}$ mit der Pfeilspitze des anderen Vektors $\vec{a}$ zur Deckung bringt. Der Summenvektor $\vec{a} + \vec{b}$ beginnt am Fusspunkt von $\vec{a}$

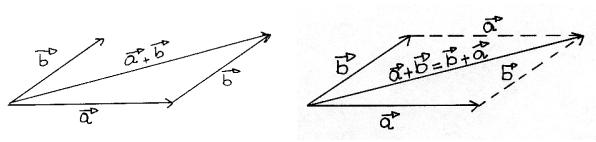


Abbildung 1.2: Addition von Vektoren (links) und Kommutativität (rechts)

und reicht bis zur Spitze von $\vec{b}$. $\vec{a} + \vec{b}$ entspricht der Diagonalen des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms. Für die Vektorsumme gilt die Kommutativität

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

Entscheidend für die Kommutativität ist die freie Parallelverschiebbarkeit der Vektoren. Assoziativität:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

Wiederum überzeugt man sich aufgrund einer graphischen Veranschaulichung sofort von der Richtigkeit dieser Behauptung. Die Differenz zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ oder die Vektorsubtraktion ist

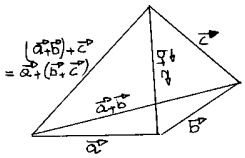


Abbildung 1.3: Assoziativität

definiert als

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) \quad .$$

Subtrahiert man $\vec{a}$ von sich selbst, so ergibt sich der Nullvektor

$$\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}.$$

Der Nullvektor hat den Betrag 0; er ist richtungslos. Für alle Vektoren gilt

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}.$$

Unter dem Produkt $p\vec{a}$ eines Vektors $\vec{a}$ mit einem Skalar p, wobei p eine reelle Zahl ist, versteht man einen Vektor, der die gleiche Richtung aufweist wie $\vec{a}$ und den Betrag

$$|p\vec{a}| = |p| \cdot |\vec{a}|$$

hat.
Hierbei gilt das Distributivgesetz, d. h.

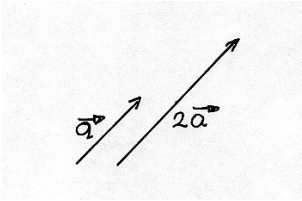


Abbildung 1.4: Multiplikation mit einer Zahl

$$(p+q)\vec{a} = p\vec{a} + q\vec{a}\,,$$
$$p(\vec{a}+\vec{b}) = p\vec{a} + p\vec{b}\,,$$

sowie das Assoziativgesetz

$$q(p\vec{a}\,) = p(q\vec{a}\,) = qp\,\vec{a}\,.$$

Ein Einheitsvektor ist ein Vektor mit der Länge 1. Aus jedem Vektor $\vec{a}$ lässt sich durch Multiplikation mit dem Kehrwert seines Betrages ein Einheitsvektor $\vec{e}_a$ in Richtung von $\vec{a}$ konstruieren.

$$\vec{e}_a = \frac{1}{a}\,\vec{a}$$

und damit auch

$$\vec{a} = a\,\vec{e}_a$$

mit

$$|\vec{e}_a| = \frac{a}{a} = 1\,.$$

Einheitsvektoren werden in der Regel mit den Buchstaben $\vec{e}$ oder $\vec{n}$ bezeichnet. Wir fassen die Gesetze der Vektoralgebra zusammen

1. $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$ Kommutativgesetz der Addition
2. $(\vec{a}+\vec{b}\,)+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}\,)$ Assoziativgesetz der Addition
3. $p\,(q\vec{a}\,) = (pq)\,\vec{a} = q\,(p\vec{a}\,)$ Assoziativgesetz der Multiplikation
4. $(p+q)\vec{a} = p\vec{a}+q\vec{a}$ Distributivgesetz
5. $p(\vec{a}+\vec{b}\,) = p\vec{a}+p\vec{b}$ Distributivgesetz

Bislang haben wir Ortsvektoren als einen Spezialfall der Vektoren diskutiert. Der Zusammenhang mit dem abstrakten mathematischen Vektorbegriff ist leicht herstellbar. Die Gesamtheit der Vektoren bilden einen linearen Vektorraum V über dem Körper der reellen Zahlen $\mathbf{R}$. Es werden die folgenden Axiome erfüllt:

I) Zwischen zwei Elementen $\vec{a}, \vec{b} \in V$ ist eine Verknüpfung (Addition) definiert

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{s} \in V$$

mit

1) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (Assoziativität)
2) Nullelement: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ für alle $\vec{a}$
3) Inverses: Zu jedem $\vec{a} \in V$ gibt es ein $(-\vec{a}) \in V$, so daß gilt $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$,
4) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (Kommutativität)

II) Multiplikation mit Elementen $\alpha, \beta, .. \in \mathbf{R}$:
$\alpha \in \mathbf{R}, \vec{a} \in V \Longrightarrow \alpha\vec{a} \in V$
mit

1) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$,
$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$, (Distributivität)
2) $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$ (Assoziativität)
3) Es gibt ein Einselement 1, so dass gilt
$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ für alle $\vec{a} \in V$.

Skalarprodukt von Vektoren. Wir haben bisher die Multiplikation von Vektoren mit Skalaren betrachtet. Jetzt wenden wir uns der Multiplikation von Vektoren zu. Hierbei werden wir zwei unterschiedliche Typen von Produkten von Vektoren kennenlernen, das Skalarprodukt (inneres Produkt) und das Vektorprodukt (äusseres Produkt). Als Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bezeichnet man den folgenden Skalar:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos\vartheta,$$

wobei ϑ den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kennzeichnet.

$$\vartheta = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$$

Anschaulich handelt es sich um das Produkt aus der Länge des ersten Vektors mit der Projektion des

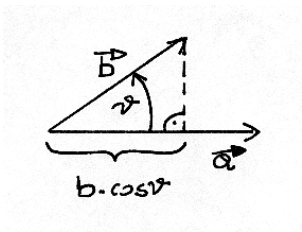


Abbildung 1.5: Skalarprodukt

zweiten Vektors auf die Richtung des ersten. Offensichtlich gilt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0,$$
$$\text{falls } 1)\, a = 0 \text{ oder (und) } b = 0$$
$$\text{oder } 2)\, \vartheta = \pi/2.$$

Basierend auf dieser Einsicht bezeichnen wir zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ als orthogonal ($\vec{a} \perp \vec{b}$) zueinander, falls $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
Eine wichtige Eigenschaft des Skalarprodukts betrifft den Betrag eines Vektors. Wegen $\cos(0) = 1$ gilt

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 \geq 0 \ .$$

Damit können wir schreiben

$$a = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} \ .$$

Für den Einheitsvektor haben wir

$$\vec{e} \cdot \vec{e} = 1 \ .$$

Ein Vektorraum, in dem ein Skalarprodukt definiert ist, heisst unitärer Vektorraum.

Einem Produkt von zwei Vektoren können wir jedoch auch einen Vektor zuordnen. Das Vektorprodukt (äusseres Produkt, Kreuzprodukt) von zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ führt zu einem Vektor $\vec{c}$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \ .$$

Der Vektor $\vec{c}$ hat folgende Eigenschaften:

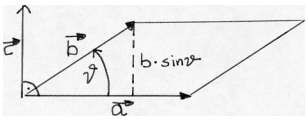


Abbildung 1.6: Vektorprodukt

1. $c = ab \sin\vartheta$,
   wobei ϑ wieder der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossene Winkel ist. Der Betrag von $\vec{c}$, also c, entspricht dem Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.
2. $\vec{c}$ steht senkrecht auf der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene. $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ bilden ein Rechtssystem.

Wir wollen nun einige wichtige Eigenschaften des Vektorproduktes diskutieren.

I) antikommutativ:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

II)

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \quad \text{falls} \quad \begin{array}{ll} 1) & a \text{ oder } b = 0 \\ 2) & \vec{b} = \alpha\vec{a}; \alpha \in \mathbf{R} \end{array}$$

Für kolineare Vektoren gilt $\sin\vartheta = 0$, da $\vartheta = 0$, und somit verschwindet das Kreuzprodukt.

III) distributiv:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

IV) nicht assoziativ

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}\,) \neq (\vec{a} \times \vec{b}\,) \times \vec{c}$$

V) bilinear

$$(\alpha\vec{a}\,) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha\vec{b}\,) = \alpha(\vec{a} \times \vec{b}\,)$$

Wir wollen nun einige Eigenschaften von Basisvektoren näher beleuchten. Wir stellen den Vektor $\vec{a}$ durch den Einheitsvektor $\vec{e}_a$ dar, um Betrags- und Richtungsangabe etwas zu trennen

$$\vec{a} = a\ \vec{e}_a\,.$$

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit der selben Richtung $\vec{e}$ heissen kolinear. Für sie lassen sich reelle Zahlen $\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0$ finden, die die Gleichung

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0$$

erfüllen. $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind linear abhängig. Damit können wir umgedreht folgende Definition vereinbaren: n Vektoren $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \ldots,\vec{a}_n$, heissen linear unabhängig, falls die Gleichung

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{a}_j = 0$$

nur durch

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$$

erfüllt werden kann. Andernfalls heissen sie linear abhängig.
Ferner gilt die Definition: Die Dimension eines Vektorraumes ist gleich der maximalen Anzahl linear unabhängiger Vektoren. In einem d-dimensionalen Vektorraum bildet jede Menge von d linear unabhängigen Vektoren eine Basis, d.h. jeder beliebige Vektor dieses Raumes lässt sich als Linearkombination dieser d Vektoren beschreiben. Besonders bedeutsam als Basisvektoren sind Einheitsvektoren, die paarweise orthogonal zueinander sind. Man spricht in diesem Fall von einem Orthonormalsystem $\vec{e}_i\,,\ i = 1, 2, \ldots, d$. Damit gilt

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$$

mit dem Kronecker-Symbol

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad i = j \\ 0 & \text{für} \quad i \neq j\,. \end{cases}$$

Ein Orthonormalsystem, das gleichzeitig Basis des Vektorraumes V ist, bezeichnet man als vollständig. Für einen beliebigen Vektor $\vec{a} \in V$ gilt dann

$$\vec{a} = \sum_{j=1}^{d} a_j\ \vec{e}_j\ \ .$$

Die a_j sind die Komponenten des Vektors $\vec{a}$ bezüglich der Basis $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_d$. Beispielsweise bilden die kartesischen Basisvektoren $\vec{e}_x,\ \vec{e}_y$ und $\vec{e}_z$ ein vollständiges Orthonormalsystem des E_3. Die Komponentenschreibweise erlaubt eine gebräuchliche Darstellung des Vektors als Spaltenvektor:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_d \end{pmatrix}$$

oder als Zeilenvektor:

$$\vec{a} = (a_1,\ a_2,\ \ldots, a_d)\,.$$

Für den dreidimensionalen euklidischen Raum können wir somit explizit schreiben

$$\begin{aligned}\vec{a} &= a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 \\ &= \sum_{j=1}^{3} a_j\,\vec{e}_j\end{aligned}$$

oder auch

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)\,.$$

Mit dem vollständigen Orthonormalsystem können wir auch den Betrag eines Vektors auswerten. Es ist

$$\begin{aligned}a &= |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{3} a_i a_j\,(\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j)} \\ &= \sqrt{\sum_{i,j=1}^{3} a_i a_j\,\delta_{ij}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} a_i^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\ .\end{aligned}$$

Für die Richtungskosinusse erhalten wir mittels der kartesischen Komponenten a_i

$$a_i = \vec{e}_i\cdot\vec{a} = a\,\cos\vartheta_i$$

mit

$$\vartheta_i = \sphericalangle(\vec{e}_i, \vec{a}).$$

Damit folgt sofort

$$\cos\vartheta_i = \frac{a_i}{a}.$$

Ferner bekommen wir

$$\cos^2\vartheta_1 + \cos^2\vartheta_2 + \cos^2\vartheta_3 = \frac{a_1^2}{a^2} + \frac{a_2^2}{a^2} + \frac{a_3^2}{a^2} = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{a^2} = 1\,.$$

Auch das Skalarprodukt lässt sich mit dem vollständigen Orthonormalsystem leicht auswerten. Es ist

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= \sum_{i=1}^{3} a_i\,\vec{e}_i\,\sum_{j=1}^{3} b_j\,\vec{e}_j \\ &= \sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j\,\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j = \sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j\,\delta_{ij} \\ \Longrightarrow\quad \vec{a}\cdot\vec{b} &= \sum_{j=1}^{3} a_j b_j\,.\end{aligned}$$

Wir studieren jetzt Vektorprodukte mit orthonormalen Basisvektoren, die ein Rechtssystem bilden. Es ist

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &\times \vec{e}_2 = \vec{e}_3\,, \\ \vec{e}_2 &\times \vec{e}_3 = \vec{e}_1\,, \\ \vec{e}_3 &\times \vec{e}_1 = \vec{e}_2\,,\end{aligned}$$

aber zum Beispiel $\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3$ und $\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = 0$. Multiplizieren wir den resultierenden Vektor wieder skalar mit $\vec{e}_i$, so folgt

$$\vec{e}_i \cdot (\vec{e}_j \times \vec{e}_k) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{falls } (i,j,k) \text{ zyklisch aus } (1,2,3) \\ -1 & \text{falls } (i,j,k) \text{ antizyklisch aus } (1,2,3) \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right\} = \varepsilon_{ijk} \ .$$

ε_{ijk} ist das Levi-Civita Symbol oder der sogenannte total antisymetrische Tensor dritter Stufe. Es ist also

$$\varepsilon_{ijk} = \vec{e}_i \cdot (\vec{e}_j \times \vec{e}_k) \ .$$

Mit diesem Symbol lassen sich Vektorprodukte der Basisvektoren zusammenfassend formulieren:

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, \vec{e}_k \ .$$

Für allgemeine Vektorprodukte gilt entsprechend

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j (\vec{e}_i \times \vec{e}_j) = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, a_i b_j\, \vec{e}_k = \sum_{k=1}^{3} c_k\, \vec{e}_k$$

mit der abkürzenden Schreibweise

$$c_k = \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, a_i b_j$$

oder ausführlich

$$c_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2,\ c_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3,\ c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Das Kreuzprodukt lässt sich auch leicht mit Hilfe der Determinantenschreibweise auswerten. Ein rechteckiges Schema von Zahlen wird Matrix genannt.

$$\begin{array}{c} \text{Spalten} \\ \downarrow \\ \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \longleftarrow \text{Zeilen} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Der erste Index des Koeffizienten gibt die Zeile an, der zweite die Spalte. Für den Fall, dass $q = p$ ist, spricht man von einer quadratischen Matrix. Dieser Matrix lässt sich ein Zahlenwert D zuordnen, der Determinante genannt wird. Für die Dimensionen 1, 2 und 3 lässt sich dieser Wert folgendermassen auswerten

1.) $\det(a_{11}) \equiv |a_{11}| = a_{11}$,

2.) $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,

3.) $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Mit Hilfe der Determinantenschreibweise können wir das Vektorprodukt auch formal auswerten durch

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{e}_1 - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{e}_3 \ .\end{aligned}$$

Dies ist identisch mit dem bereits abgeleiteten Resultat.

Wird jedem Wert einer skalaren Variablen t ein Vektor $\vec{r}(t)$ zugeordnet, dann heisst $\vec{r}(t)$ Vektorfunktion der skalaren Variable t. Trägt man $\vec{r}(t)$ in einem festen Punkt 0 an, dann liegen die Endpunkte von $\vec{r}(t)$ auf einer Raumkurve, die Trajektorie oder die Bahnkurve des Massenpunktes P.

Ein wichtiger Begriff ist die Ableitung derartiger vektorwertiger Funktionen. Wir betrachten $\vec{r}$ zu

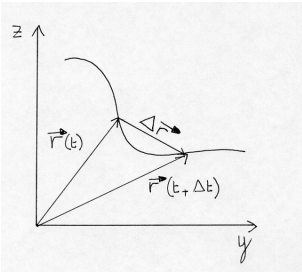


Abbildung 1.7: Bahnkurve eines Massenpunktes

verschiedenen Zeiten t und $t+\Delta t$ und bilden den Differenzvektor $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$. Dies erlaubt die Geschwindigkeit als Grenzübergang zu definieren:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \doteq \dot{\vec{r}} \doteq \frac{d\vec{r}}{dt}$$

In einem zeitunabhängigen orthonormalen Basissystem $\vec{e_i}$ gilt $\vec{r}(t) = \sum_{i=1}^{3} x_i(t)\vec{e_i}$, kurz $\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$ und $\dot{\vec{r}} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$ (sog. kartesische Koordinaten). Ein Massenpunkt P in einem euklidischen Raum hat dementsprechend **3 Freiheitsgrade**, d.h. seine Lage ist durch die Angabe von 3 Koordinaten eindeutig festgelegt. Es gelten die folgenden Ableitungsregeln

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[f(t)\,\vec{a}(t)] &= \dot{f}(t)\,\vec{a}(t) + f(t)\,\dot{\vec{a}}(t) \quad , \\ \frac{d}{dt}[\vec{a}(t)\cdot\vec{b}(t)] &= \dot{\vec{a}}(t)\cdot\vec{b}(t) + \vec{a}(t)\cdot\dot{\vec{b}}(t) \quad , \\ \frac{d}{dt}[\vec{a}(t)\times\vec{b}(t)] &= \dot{\vec{a}}(t)\times\vec{b}(t) + \vec{a}(t)\times\dot{\vec{b}}(t) \quad .\end{aligned}$$

Höhere Ableitungen einer Vektorfunktion lassen sich entsprechend definieren. Für analytische Vektorfunktionen gilt die Taylor Entwicklung um $t = t_0$:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t)|_{t_0} + \frac{\dot{\vec{r}}(t)|_{t_0}}{1!}\cdot(t-t_0) + \frac{\ddot{\vec{r}}(t)|_{t_0}}{2!}\cdot(t-t_0)^2 + \ldots$$

Die Integration von vektorwertigen Funktionen erfolgt auch komponentenweise:

$$\int_{t_o}^{t_1}\vec{r}(t)dt = \Big(\int_{t_o}^{t_1}x(t)dt, \int_{t_o}^{t_1}y(t)dt, \int_{t_o}^{t_1}z(t)dt\Big)$$

bei der konkreten Lösung physikalischer Probleme ist die Wahl geeigneter Koordinaten ein sehr wesentlicher Lösungsschritt. Benutzt man kartesische Koordinaten, dann betrachtet man P sozusagen als die Ecke eines Parallelepipeds. Man kann sich aber P auf einer Kugeloberfläche (Zylinderoberfläche) vorstellen: dann benutzt man *Kugelkoordinaten*(*Zylinderkoordinaten*):

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (r\, sin\, \theta\, cos\, \phi, r\, sin\, \theta\, sin\, \phi, r\, cos\, \theta); 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi \\ (x, y, z) &= (\rho\, cos\, \phi,\ \rho\, sin\, \phi, z); 0 \leq \phi \leq 2\pi\end{aligned}$$

Zylinderkoordinaten in der Ebene $z = 0$ heissen auch *Polarkoordinaten.* Kugel-und Zylinderko-

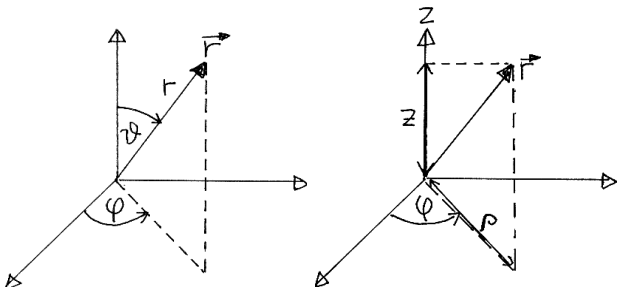


Abbildung 1.8: Kugelkoordinaten (links) und Zylinderkoordinaten (rechts)

ordinaten sind ein Beispiel von krummlinigen Koordinaten. Mit einer geeigneten Parametrisierung $x(q_1, q_2, q_3), y(q_1, q_2, q_3), z(q_1, q_2, q_3)$ kann man die krummlinigen Koordinaten (q_1, q_2, q_3) dazu benutzen, den ganzen euklidischen Raum als eine aufeinanderfolgende Sequenz von Raumflächen zu decken.

Der direkteste Weg, die Bewegung von P zu erfassen, ist die Messung von $\vec{r}(t)$ über ein gewisses Zeitintervall. Dadurch lässt sich vielleicht ein Gesetz erkennen, mit dessen Hilfe man den weiteren Verlauf der Bewegung voraussagen kann. So haben Naturwissenschaftler bis und mit Galileo Galilei gearbeitet. Durch unzählige Beobachtungen hatte man ein sehr genaues Bild, z.B. der Dynamik der Planeten und der Sterne (fast so genau wie unseres) erlangt, und konnte damit schon Begriffe wie die jährliche Periodizität der Erdbewegung um die Sonne formulieren. Das Experiment von Galileo auf dem Turm von Pisa ist in diesem Sinne ein Merkmal in der Geschichte der Physik: Er lässt eine Kugel aus einer Höhe z_0 fallen, misst ihre Lage z als Funktion der Zeit und schliesst auf ein t^2 -Gesetz: $z(t) = z_0 - \frac{1}{2}gt^2$. Galileo war danach imstande, die Position der Kugel zu jeder Zeit anzugeben.

Im Prinzip könnte man auf diese Art alle wichtigen Bewegungen der Natur erfassen. Dank Sir Isaac Newton wissen wir jedoch, dass hinter der Vielfalt von Bewegungen noch fundamentalere Gesetze existieren, anhand derer die Bahn von P im Prinzip voraussehbar ist, wenn nur zu einem bestimmten Zeitpunkt Ort und Geschwindigkeit bekannt sind. Das vereinfacht natürlich das Leben des Physikers: Er muss nicht jeden P mühsam verfolgen, um ein empirisches Gesetz zu formulieren. Eine einzige Angabe $(\vec{r}(t_0), \dot{\vec{r}}(t_0))$ genügt. Diese Angabe nennt man *Anfangsbedingungen,* die Gesetze, die die Bewegung beschreiben, nennt man *Bewegungsgleichungen.*

1.2 Das Hamilton-Prinzip

Leider benötigt die Formulierung der Bewegungsgleichungen – wie alle Gesetze der Physik – einen gewissen Grad an Abstraktion. Diese Abstraktion ist, neben der Beobachtung, eine weitere Eigenschaft, die die Physik kennzeichnet. Abstraktion bedeutet oft die Einführung von Hilfsgrössen, die keinen unmittelbaren experimentellen Zugang haben und deshalb eher mathematischer Natur sind.

Seit den Arbeiten von R.P. Feynman (wie Newton und Einstein einer der Grossen der Physik) wissen wir, dass eine allgemeine Methode, physikalische Gesetze zu formulieren, im *Prinzip der kleinsten Wirkung* (*principle of least action*) liegt. Dieses Prinzip wurde von W.R. Hamilton in der Mechanik 1823 eingeführt, und erlaubt, die Bewegungsgleichungen aufzustellen. Die für seine Formulierung benötigten abtsrakten Grössen wollen wir anhand des Experimentsvon Galileo einführen. Gegeben sei ein Massenpunkt P, der sich auf einer Höhe z_0 zur Zeit t_0 befindet. Lässt man P fallen, so verringert sich seine Höhe, während seine Geschwindigkeit gleichzeitig zunimmt. Zur Zeit t_0 besitzt P aus sich heraus (dadurch dass er auf einer bestimmten Höhe ist) die Fähigkeit, Geschwindigkeit zu gewinnen. Diese Fähigkeit drücken die Physiker mit dem Begriff der *potentiellen Energie* aus. Die potenzielle Energie ist eine skalare Grösse, d.h. sie kann nur eine Funktion von $(\vec{r} \cdot \vec{r})$ sein. Die einfachste Wahl für E_{pot} im Galileo Experiment ist $E_{pot}(z) = \alpha z$, wobei wir α später bestimmen. Mit dieser Wahl drücken wir die Tatsache aus, dass je höher P liegt, die Geschwindigkeit dementsprechend zunehmen kann, bevor er auf die Erde trifft. Wir könnten auch weitere Potenzen von z_0 berücksichtigen (das wäre sogar richtiger, wie wir später zeigen werden). Wir wollen aber sehen, ob dieser einfache lineare Ansatz genügt, um den Fallvorgang zu beschreiben. Die einfachste skalare Grösse, die man mit einem Vektor $\dot{\vec{r}}$ bilden kann, ist $(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}})$, sodass die Energie, die mit der Geschwindigkeit assoziert ist, $E_{kin} = E_{kin}(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}})$ sein muss. Wir werden später sehen, dass die einfachste Wahl, die sich anbietet – $E_{kin}(\dot{z}) \propto \dot{z}$ – falsch ist: die niedrigste Potenz, die mit den Experimenten in Einklang ist, ist $E_{kin}(\dot{z}) = \beta \dot{z}^2$, wobei wir seit Einstein wissen, dass auch diese Wahl nur eine Näherung für $\dot{z} << c$, mit ($c =$ Lichtgeschwindigkeit $= 3 \times 10^8$ m/sec) ist. Durch die Einführung der abtstrakten Begriffe $E_{pot}(\vec{r})$ und $E_{kin}(\dot{\vec{r}})$ sind wir imstande, das Hamilton Prinzip zu formulieren. Dem Massenpunkt P ordnen wir die Lagrange Funktion zu:

$$L[\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)] = E_{kin}(\dot{\vec{r}}) - E_{pot}(\vec{r})$$

die im Fall vom Galileo Experiment zu $L(z, \dot{z}) = \beta \dot{z}^2 - \alpha z$ wird.

Der Begriff des Feldes stellt ein fundamentales Konzept in der Physik dar. Man unterscheidet zwischen Skalarfeldern und Vektorfeldern. Ein *Skalarfeld* $\Phi(\vec{r}) = \Phi(x, y, z)$ ist eine skalarwertige Funktion dreier unabhängiger Variablen, wobei sich die Zahl drei auf die Dimension unseres Raumes bezieht.

Beispiel: Wir betrachten die Funktion $\Phi(\vec{r}) = \alpha/(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$. Graphisch stellt man solche Felder durch 2-dimensionale Schnitte dar, in denen die Flächen $\Phi(\vec{r}) = Konst$ (Äquipotentialfläche) als Höhenlinien erscheinen. Der Abstand der Linien enstpricht dabei gleichen Wertunterschieden der Konstanten.

Beispiel: Die Lagrange Funktion des Galileo Experiments kann man als zweidimensionales Skalarfeld $L(x, y) = y^2 - x$ darstellen.
Ein *Vektorfeld* ordnet jedem Punkt im Raum eine vektorwertige Funktion $\vec{K} = \vec{K}(\vec{r})$ zu.
Beispiel: Das Gravitationsfeld eines Masssenpunktes ist gegeben durch
$\vec{K}(\vec{r}) = m\frac{\vec{r}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$.
Graphisch lassen sich Vektorfelder durch 2-dimensionale Schnitte darstellen, in denen die Flächen konstanter Feldstärke $|\vec{K}(\vec{r}| = Konst.$ als Höhenlinien erscheinen, an denen man das Feld lokal durch einen Vektorpfeil charakterisiert. Vektorfelder kann man auch mittels Feldlinien darstellen, wobei das Feld tangential zur Feldlinie verläuft. Die Dichte der Feldlinien ist dann ein Mass für die Stärke des Feldes. Für Skalarfelder kann man den Begriff der partiellen Ableitung einführen:

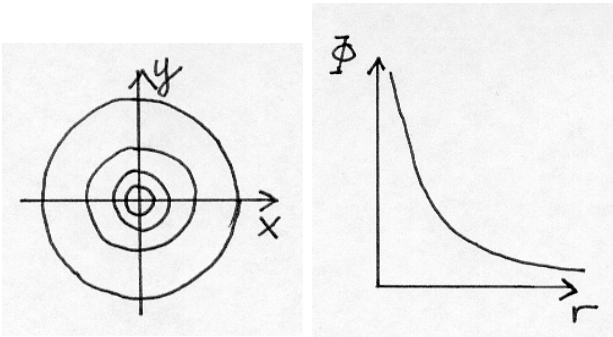


Abbildung 1.9: Graphische Darstellung eines Skalarfeldes

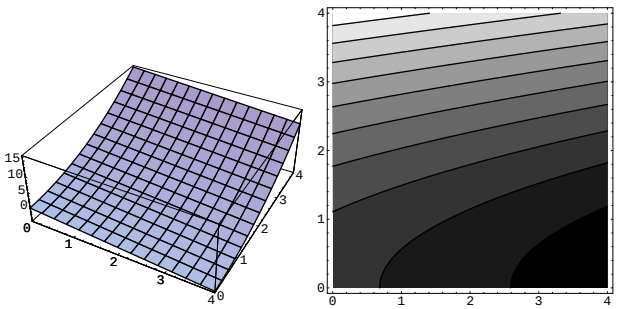


Abbildung 1.10: Graphische Darstellung von $L(x, y) = y^2 - x$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \doteq \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x + \Delta x, y, z)}{\Delta x}$$

(und ähnlich für y, z). Damit lässt sich die räumliche Änderung der Skalarfelder beschreiben. Wir betrachten zwei Punkte $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$, die durch eine kleine Strecke $d\vec{r}$ voneinander getrennt sind.
Die Änderung $d\Phi = \Phi(\vec{r}_2) - \Phi(\vec{r}_1)$ ist gegeben durch die folgende Summe:

$$\begin{aligned} d\Phi &= \frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}dz \\ &= (\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z}) \cdot (dx, dy, dz) \\ &\doteq \vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

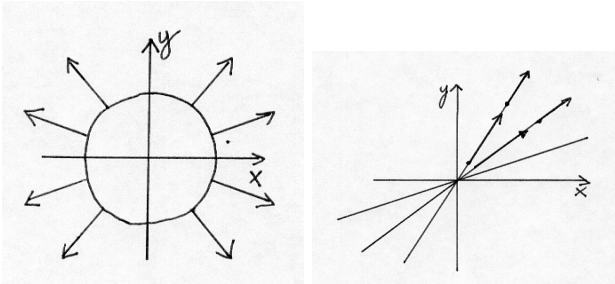


Abbildung 1.11: Graphische Darstellung eines Vektorfeldes

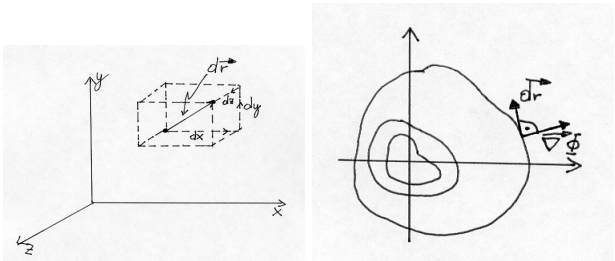


Abbildung 1.12: Konstruktion zur Berechnung von $d\Phi$ (links) und graphische Deutung des Gradienten (rechts)

wobei $\vec{\nabla}\Phi$ der *Gradient* von Φ und $d\Phi$ das totale Differential des Feldes Φ sind. Der Gradient lässt sich deuten, indem man $d\vec{r}$ in die Richtung wählt, so dass $d\Phi = 0$ in dieser Richtung ist. Aus der Gleichung $\vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{r_0} = 0$ folgt, dass $\vec{\nabla}\Phi$ senkrecht auf $d\vec{r_0}$ steht. Anderseits definiert $d\Phi = 0$ Flächen $\Phi = Konst.$, so dass $\vec{\nabla}\Phi$ senkrecht auf den Äquipotentialflächen steht. Sein Betrag ist ein Mass für die Stärke der Änderung von Φ, wenn man senkrecht zu den Äquipotentialflächen fortschreitet.
Für ein Vektorfeld kann man den Begriff des Linienintegrals einführen (in der Physik spricht man von "Arbeit" A oder W). Die Arbeit, die wir aufbringen müssen, um einen Gegenstand von Punkt P_1 zu Punkt P_2 entlang des Wegs C zu bewegen, ist definiert als Wegintegral der Kraft

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\,\vec{r}$$

mit $d\vec{r} = (dx,\, dy,\, dz)$. Das Inkrement $d\vec{r}$ ist ein Vektor, die Arbeit hingegen ist aufgrund des Skalarproduktes ein Skalar.
C ist hierbei die Bezeichnung für die Raumkurve $\vec{r}(t)$ zwischen dem Anfangspunkt $P_1 = \vec{r}(t_1)$

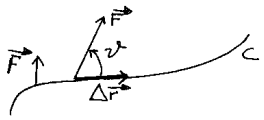


Abbildung 1.13: Zur Definition der Arbeit einer Kraft

und dem Endpunkt $P_2 = \vec{r}(t_2)$. Wir geben nun eine Möglichkeit an, das Linienintegral explizit zu berechnen. Dazu zerlegen wir das Vektorfeld $\vec{F}$ in seine kartesischen Komponenten und setzen dies in das Integral ein: $\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int (F_x,\ F_y,\ F_z) \cdot d\vec{r}$. Die kartesischen Komponenten F_i sind noch eine Funktion des Ortes, d.h. $F_i = F_i(x, y, z)$ mit $x = x(t)$, $y = y(t)$ und $z = z(t)$. Für das Integral benötigen wir die Komponenten des Vektorfeldes $\vec{F}$ entlang der Raumkurve in Abhängigkeit des Parameters t. Wir erhalten dies, indem wir die entsprechenden Komponenten der Raumkurve $\vec{r}(t)$ in F_x, F_y und F_z einsetzen. Für $d\vec{r}$ schreiben wir $d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot dt$. Für das Arbeitsintegral ergibt sich durch Einsetzen

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_C \left[(F_x(x(t),\ y(t),\ z(t)),\ F_y(x(t),\ y(t),\ z(t)),\ F_z(x(t),\ y(t),\ z(t))) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right] dt \\
&= \int_{t_A}^{t_E} \left[F_x(t)\frac{dx}{dt} + F_y(t)\frac{dy}{dt} + F_z(t)\frac{dz}{dt} \right] dt \quad .
\end{aligned}$$

Damit übersetzen wir das Linienintegral in die Summe gewöhnlicher eindimensionaler Integrale.

Beispiel. Das Vektorfeld $\vec{F}$ und die Raumkurve $\vec{r}(t)$ seien gegeben durch $\vec{F} = (0, 0, -mg)$ und $(v_0 t, 0, z_0 - 1/2gt^2)$. Die von der Kraft geleistete Arbeit zwischen den Zeiten t_1, t_2 ist

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{t_1}^{t_2} [0, 0, -mg][v_0, 0, -gt]dt \\
&= \frac{1}{2} mg^2 (t_2^2 - t_1^2) \\
&= mg \cdot z_1 - mg \cdot z_2
\end{aligned}$$

Falls $\vec{F} = -\vec{\nabla}\Phi$, heisst das Vektorfeld *konservativ*. Für solche Felder, welche Kraftfelder sind, gilt $\vec{F} \cdot d\vec{r} = d\Phi$ Somit ist $\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \Phi(P_1) - \Phi(P_2)$: Wegintegrale über konservative Felder zwischen den Punkten P_1 und P_2 sind unabhängig vom explizit gewählten Weg, und sind nur vom Wert des skalaren Feldes am Anfangspunkt P_1 und am Endpunkt P_2 abhängig.

Nach dem Hamilton Prinzip verläuft die Bewegung eines mechanischen Systems von einem gegebenen Anfangspunkt zur Zeit t_0 zu einem gegebenenm Endpunkt zur Zeit t_1 derart, dass die Wirkung

$$S[r(\vec{t}), r(\dot{\vec{t}})] \doteq \int_{t_0}^{t_1} L\Big(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)\Big) dt$$

minimal ist (Prinzip der kleinsten Wirkung). $S[\vec{r}, \dot{\vec{r}}]$ ist ein *Funktional*, das allen möglichen Bahnen $[\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)]$ eine reelle Zahl zuordnet – den Wert des Integrals. Eine Möglichkeit, dieses Prinzip zu benutzen, um die physikalische Bahn zu finden, ist die Auswahl vieler Bahnen, unter welchen S minimalisiert wird. In diesem Sinne ist das Hamilton Prinzip ein Variationsprinzip, d.h. man versucht durch variieren der Bahn jene zu finden, die S minimiert. Es ist heutzutage nicht ungewöhnlich, dass viele Probleme der Naturwissenschaft (inklusive der Biologie) als Variationsprinzip formuliert werden. Damit wird das Problem der Suche nach dem Minimum eines geeigneten Funktionals reduziert – ein ideales Terrain für die heutigen Supercomputer. Oft wird die Suche nach der Lösung folgendermassen gestaltet: man erzeugt eine Schar von Funktionen, die aus irgendeinem Grund

”physikalisch” sein könnten. Diese Funktionen werden geeignet parametrisiert und es werden solche Parameter gesucht, die S minimalisieren. Die so ermittelte Funktion ist dann eine Möglichkeit für die korrekte Lösung, wobei ein Funktional oft viele Minima besitzt, so dass die Suche nach dem absoluten Minimum weitere Optimierungsschritte erfordert.

Wir wollen diesen möglichen Lösungsweg am Galileo-Experiment illustrieren. Wir beginnen mit der Vermutung (um ein Variationsproblem vernünftig zu lösen, muss man eine ”Vermutung” über die mögliche Bahn haben), dass $z(a,t) = z_0 - at^2$ ist. a ist hier der sogenannte *Variationsparameter*, der so gewählt werden muss, damit S minimal wird. Damit ist

$$L(z(t), \dot{z}(t)) = \underbrace{\beta(-2at)^2}_{E_{kin}} - \underbrace{\alpha(z_0 - at^2)}_{E_{pot}} = 4\beta a^2 t^2 - \alpha z_0 + \alpha a t^2 = L(a,t)$$

Die Bahn wird variiert, aber die Randpunkte sollen fest sein. Wir setzen $z(t = 0) = z_0$ und $z(t = t_0) = 0$ ein. Die Wirkung berechnet über die möglichen Bahnen $z(a,t)$ zwischen diesen festen Randpunkten ist

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^{t_0} L(a,t)dt = \\ &= \beta 4a^2 \frac{1}{3} t_0^3 - \alpha z_0 t_0 + \alpha\, a \frac{t_0^3}{3} \overset{z_0 = at_0^2}{=} \\ &= \beta 4a^2 \frac{1}{3} t_0^3 - \alpha\, a \frac{2}{3} t_0^3 \end{aligned}$$

a_{ph} bestimmen wir als Lösung der Gleichung $\frac{dS(a)}{da} = 0$, d.h. $a_{ph} = \frac{\alpha}{4\beta}$. Der Vergleich dieses theoretischen Resultats mit dem experimentellen Resultat $a_{ph} = \frac{1}{2}g$ erlaubt, das Verhältnis des bis jetzt unbekannten Parameters β und α zu bestimmen: $\frac{\alpha}{\beta} = 2g$. Mit Hilfe dieses Prinzips haben wir eine eindeutige Voraussage erlangt, die mit dem Experimemt verifiziert werden kann: legen wir β fest, dann ist auch α festgelegt. Mit der Wahl $\beta = 1/2m$, müssen wir α zu mg umwandeln, damit das Hamilton Prinzip mit dem Experiment konsistent ist. Damit kennen wir auch die genaue Form der Lagrange Funktion für das Galileo Experiment.

Wir hätten anders argumentieren können. Angenommen die Koeffizienten α und β seien bekannt, dann besagt unser Variationsprinzip, dass a_{ph} von m unabhängig ist. Wir haben damit eine Voraussage produziert, die man experimentell testen kann. Ist der Test erfolgreich, so freuen wir uns, dass aus einem so abstrakten Prinzip direkt eine solch konkrete (und gewissermassen überraschende) experimentelle Tatsache folgt.

Ein zweiter möglicher Weg zur Lösung des Variationsprinzips von Hamilton führt zu den **Bewegungsgleichungen**. Zum Studium diseses zweiten Wegs wollen wir zunächst Variationsprobleme im Allgemeinen diskutieren.

Gegeben sei die integrierbare Funktion

$$F = F(y(x), y'(x)) \quad .$$

Wir suchen eine Funktion $y = y(x)$, so daß das Funktional

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(y(x), y'(x))\, dx$$

einen Extremalwert annimmt. Angenommen, $y(x)$ sei eben diese Funktion, die Izu einem Minimum macht. Dann wächst I wenn $y(x)$ durch eine Funktion der Form $y(x) + \delta y(x)$ ersetzt ist. $\delta y(x)$ ist eine beliebige differenzierbare Funktion, die an den Endpunkten verschwindet.

$$\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$$

und heisst *Variation* der Funktion $y(x)$. Die Änderung von I beim Einsetzen von $y(x) + \delta y(x)$ ist

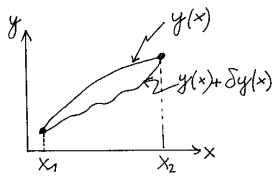


Abbildung 1.14: Die Variation von $y(x)$

die *Variation* des Funktionals $I[y(x)]$:

$$\begin{aligned} \delta I &= I[y(x) + \delta y(x)] - I[y(x)] \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left(F(x, y(x) + \delta y(x), y'(x) + \delta y'(x))\right) - F\left(x, y(x), y'(x)\right) \end{aligned}$$

Die Entwicklung dieser Differenz nach Potenzen von δy und $\delta y'$ im Integranden beginnt mit Gliedern erster Ordnung. Die notwendige Bedingung, dass I extremal ist, ist das Verschwinden dieser Glieder. Nach Ausführung der Taylor Entwicklung erhalten wir

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \delta y'\right) dx$$

Wenn man berücksichtigt, dass $\delta y' = \frac{d}{dx}\delta y$ ist, dann lässt sich der zweite Integrand partiell integrieren:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \frac{d}{dx}\delta y = \left[\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y$$

Da die Endpunkte fest sein sollen, verschwindet der ausintegrierte Term, und die Extremalbedingung lautet

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y\, dx = 0 \quad .$$

Da $\delta y(x)$ eine beliebige Funktion sein kann, ist diese Gleichung allgemein nur dann erfüllt, wenn

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F(y(x), y'(x))}{\partial y'} - \frac{\partial F(y(x), y'(x))}{\partial y} = 0$$

ist. Diese Beziehung heißt *Euler-Lagrange-Gleichung*. Sie stellt eine notwendige Bedingung für einen Extremwert des Integrals I dar.

Wir kehren zurück zum Hamilton Prinzip. Hierbei wird die Zeit als Koordinate nicht variiert. Das System durchläuft einen Bahnpunkt und den dazugehörigen variierten Bahnpunkt zur gleichen Zeit. Es gilt also $\delta t = 0$. Ausgehend vom Integral

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t)\, dt = 0 \quad ,$$

führen wir die Variation durch. Die Variation einer Bahnkurve $\vec{r}(t)$ beschreiben wir durch $\vec{r}(t) \rightarrow \vec{r} + \delta\vec{r}(t)$, wobei $\delta\vec{r}$ an den Endpunkten verschwinden soll: $\delta\vec{r}(t_1) = \delta\vec{r}(t_2) = 0$. Da die Zeit nicht variiert wird, folgt

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt &= \int_{t_1}^{t_2} \delta L\, dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial_i} \delta q_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt \quad . \end{aligned}$$

wobei $q_i(t)$ die i-te Koordinate darstellt. Wegen $\frac{d}{dt}\delta q_i = \delta \dot{q}_i(t)$, liefert die partielle Integration des zweiten Summanden

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i\, dt &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i\, dt \\ &= \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt \quad . \end{aligned}$$

Da δq_i an den Endpunkten (Integralgrenzen) verschwindet, erhalten wir für die Variation des Integrals

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \right] dt = 0 \quad .$$

Das Integral verschwindet nur dann, wenn der Koeffizient eines jeden δq_i verschwindet. Daraus folgen die **Lagrange-Gleichungen** der Mechanik:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

$i = 1, 2, 3$. Das sind die *Bewegungsgleichungen*. Sie sind eine Folge des Variationsprinzips, so wie alle Gleichungen der Physik eine Folge eines Variationsprinzips sind (oder sein sollten). Für einen Massenpunkt P mit der Lagrange Funktion $L[\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)] = 1/2m\dot{\vec{r}}^2 - U(\vec{r})$, bekommen wir

$$m \cdot \ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla} U(\vec{r})$$

Diese wurden, in dieser Form, von Newton gefunden. Deswegen heissen die Lagrange Gleichungen eines Massenpunktes in kartesischen Koordinaten auch *Newton* Gleichungen. Wichtige Fragen der Physik wurden durch die explizite Lösung dieser Gleichungen beantwortet. Die BG sind Differentialgleichungen (DG). Sie lassen sich eindeutig lösen, wenn die Anfangsbedingungen bekannt sind. Die Struktur dieser Differentialgleichungen suggeriert, dass zwei Angaben als Anfangsbedingungen notwendig und hinreichend sind: Ort und Geschwindigkeit zu einer bestimmen Zeit.

Die Terme in den Newton Gleichungen haben folgende Bedeutung: Die zweite zeitliche Ableitung von $\vec{r}$ ist die *Beschleunigung* von P, und beschreibt die Änderung der Geschwindigkeit. Die negative Ableitung der potentiellen Energie ist die *Kraft*, die für die Änderung der Geschwindigkeit verantwortlich ist. Die Beschleunigung wird in den Einheiten m/sec^2 gemessen, die Kraft misst man in $kg \cdot m/sec^2 = Newton\ (N)$. Die Energie ist deshalb $N \cdot m = Joule\ (J)$. Am Beispiel von Galileo nehmen die BG eine besonders einfache Form an. Die potentielle Energie, die der Ursprung der Kraft ist, ist bekannterweise mgz. Die Kraft ist $(0, 0, K_z = -mg)$. Die Bewegungsgleichungen lauten

$$m\ddot{x} = m\ddot{y} = 0;\ m\ddot{z} = -mg$$

und deren Lösung, mit $x(t = 0) = y(t = 0) = 0, z(t = 0) = z_0$:

$$(0, 0, z_0 - \frac{1}{2}gt^2)$$

1.3 Einige wichtige Kräfte der Natur

Die entscheidende Grösse der Mechanik ist die potentielle Energie. Man fragt sich nun, wie die potentielle Energie beschaffen ist, die in einem bestimmten System von Massenpunkten steckt, (Massen, aber auch Elektronen, Atome, Moleküle und Festkörper!). Diese Frage muss von Fall zu Fall beantwortet werden, und viele Fälle (die potentielle Energie zwischen Quarks, zum Beispiel) sind weit davon entfernt, gelöst zu sein.

Die bis jetzt benutzte Vorstellung über die potentielle Energie, die aus dem Galileo-Experiment hervorgeht, muss erweitert werden. Wir hatten nämlich nur mit einem P zu tun. Das ist eine noch zu begründende Vereinfachung, denn in der Tat sind alle nicht trivialen Probleme der Physik – seien es die Planeten um die Sonne, sei es die chemische Bindung in Molekülen und Festkörpern – dadurch gekenngezeichnet, dass mehrere Massenpunkte beteiligt sind. Die potentielle Energie beschreibt die Wechselwirkung zwischen den Massenpunkten. Diese neue Definition sprengt natürlich unsere Definition der potentiellen Energie als die Grösse, die in kinetische Energie umgewandelt wird. Mit dieser Definition können wir jetzt allgemeiner vorgehen.

Für die Bestimmung von E_{pot} gibt es leider kein allgemeines Prinzip. So hat zum Beispiel Newton das *Gravitationsgesetz*, das die Wechselwirkung zwischen

zwei Massen beschreibt, aus der Analyse zahlreicher Beobachtungen der Mond- und Planetenbewegungen (von Tycho Brache und Kepler durchgeführt) erraten. Seit Newton wissen wir, dass

$$\vec{K}_{1\to 2} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\vec{r_2} - \vec{r_1}|^2} \frac{\vec{r_2} - \vec{r_1}}{|\vec{r_2} - \vec{r_1}|}, \ \gamma = 6.674 \times 10^{11} \frac{Nm^2}{kg^2}$$

ist, wobei γ die *Gravitationskonstante* ist.

Die Grösse γ kann man den astronomischen Beobachtungen nicht entnehmen, solange man die Masse nicht genau kennt. Das Gravitationsgesetz lässt sich jedoch mit Massen der Grössenordnung kg im Laboratorium prüfen, und auf diese Weise bestimmen. Das Experiment zur Bestimmung von γ wurde erstmals von Henry Cavendish im Jahre 1798 durchgeführt, mit einer Drehwaage.

Aus der Definition der Kraft lässt sich die potentielle Energie angeben:

$$\vec{K} = -\vec{\nabla} E_{pot} \Rightarrow E_{pot} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r} + konst. \ ,$$

wobei: $r =$ den Abstand zwischen m_1 und m_2 darstellt.

Die Konstante wird üblicherweise mit 0 bezeichnet, da sie für die Bewegung unwesentlich ist (lediglich die Ableitung der potentiellen Energie ist wichtig, aber beim Ableiten verschwinden die Konstanten). Diese Wahl der Konstante entspricht einer potentiellen Energie, die im Unendlichen verschwindet.

Was hat dieser Ausdruck der potentiellen Energie mit der uns bekannten Formel $E_{pot} = m \cdot g \cdot z$ zu tun? Um diese Verbindung herzustellen, betrachten wir eine kleine Masse m in der Nähe einer riesigen Kugel mit dem Radius R und der riesigen Masse M. Dieses Gebilde soll einen Massenpunkt in der Nähe der Erde darstellen. Wir simulieren dieses System, indem wir die Erde auf einen Punkt schrumpfen lassen, und m auf den Abstand $R + z$ legen, $z << R$. Dann ist die potentielle Energie

$$E_{pot} = -\gamma \frac{Mm}{R+z} + Konst. = -\gamma \frac{Mm}{R(1+\frac{z}{R})} + Konst.$$

nach Taylorentwicklung:

$$\approx -\gamma \frac{mM}{R}(1 - \frac{z}{R} + 0(\frac{z^2}{R^2})) + Konst.$$

$$= -\gamma \frac{Mm}{R} + Konst. + \gamma \frac{M}{R^2} mz = m[\frac{m\gamma}{R^2}]z + Konst.'$$

Bis auf eine Konstante ist dieses Resultat gleich dem uns bekannten Ausdruck, wobei wir hiermit auch einen experimentell prüfbaren Ausdruck für die Konstante g erzielt haben.. Eine zweite wichtige Kraft ist die *Coulombkraft*, die Atome, Moleküle und Festkörper zusammenhält. Sie beschreibt die Wechselwirkung zwischen zwei Ladungen e_1 und e_2 nach dem Gesetz

$$K_{Coulomb} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e_1 e_2}{|\vec{r_2} - \vec{r_1}|^2} \frac{\vec{r_2} - \vec{r_1}}{|\vec{r_2} - \vec{r_1}|}$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9 \frac{nm^2}{Cb}, \ [e] = Cb$$

Die Orientierung der Kraft (abstossend oder anziehend) hängt von der Ladung der Teilchen ab: Teilchen gleicher Ladung (z.B. zwei Elektronen) stossen sich ab, bei

verschiedener Ladung (z.B. Proton und Elektron) ziehen sie sich an. Diese Kraft wurde erst später entdeckt (historisch), ist aber für uns noch relevanter als die Gravitation. Die Vielfalt, die durch diese Kraft in die Natur eingeführt wird, werden wir in der Vorlesung "Physik II" gründlich diskutieren. Glücklicherweise ist die Ortsabhängigkeit der beiden Kräfte genau die gleiche. Vom Standpunkt der Bewegungsgleichungen aus können wir aus dem Studium der Himmelsmechanik sehr nützliche Informationen (*sogar übertragbare Resultate*) für das Verständnis des Aufbaus von Atomen, Molekülen und Festkörpern gewinnen.
*__Bemerkungen__.

1. Wir betrachten n Massenpunkte, die untereinander mit der potentiellen Energie $U(\vec{r_1}, \ldots, \vec{r_n})$ wechselwirken. Die Lagrange Funktion lautet

$$L(\vec{r_1},, \ldots \vec{r_n}, \dot{\vec{r_1}}, \ldots \dot{\vec{r_n}}) = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r_i}}^2 - U(\vec{r_1}, \ldots, \vec{r_n})$$

   Die BG lauten $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r_i}}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r_i}} = 0$, $i = 1, \ldots n$.

2. Wenn man für die Beschreibung der Bewegung nicht kartesische x_i, sondern verallgemeinerte Koordinaten $x_i = f_i(q_1, q_2, q_3)$ und $\dot{x}_i = \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial q_j}\dot{q}_j$ benutzt, so muss man diese Transformationen in die Lagrange Funktion einsetzen, um die Lagrange in den Koordinaten q_i zu bekommen. Damit nimmt die Lagrange Funktion die Form $L = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j - U(q_1, \ldots, q_3)$ an, d.h. die kinetische Energie kann von den Ortskoordinaten abhängen. Die Form der Lagrange Gleichungen bleibt allerdings invariant. Darin besteht einer der Vorteile des Lagrange Formalismus.

3. Bei Problemen in der Mechanik kann es vorkommen, dass einige Koordinaten durch Nebenbedingungen eingeschränkt sind. Diese Nebenbedingungen sind durch Gleichungen zwischen den Koordinaten dargestellt. Damit wird die Zahl der Freiheitsgrade von $3n$ zu $f < 3n$ beschränkt. Durch Einsetzen dieser Nebengleichungen in der Lagrange Funktion kann es passieren, dass nur die f Koordinaten, die den tatsächlichen Freiheitsgraden entsprechen, vorkommen. Dann reichen die formulierten BG dieser Koordinaten für die komplette Beschreibung vollkommen aus, wobei die anderen "leicht" aus dem Problem eliminiert wurden.

Kapitel 2

Anwendungen der BG

2.1 Eindimensionale Probleme

Die Bewegung eines Massenpunktes mit einem Freiheitsgrad heisst eindimensionale Bewegung. Die Lagrange Funktion einer solchen Bewegung ist $L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - U(x)$, die dazugehörige BG ist $m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx}$. Diese Gleichung lässt sich folgendermassen integrieren:

$$\begin{aligned}
\dot{x} \cdot m\ddot{x} &= \dot{x} \cdot (-\frac{dU}{dx}) \\
\frac{d[\frac{1}{2}m\dot{x}^2]}{dt} &= -\frac{dU}{dt} \\
\frac{d[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x)]}{dt} &= 0 \\
\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) &\doteq E
\end{aligned}$$

Die so gewonnene Integrationskonstante E ist ein *Integral* der Bewegung, da sie mit der Zeit unverändert bleibt. Diese Konstante heisst *totale Energie der Bewegung*. Sie kann dazu benutzt werden, um die Bewegungen zu klassifizieren. Die resultierende DG erster Ordnung lässt sich durch Trennung der Veränderlichen integrieren:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) &= E \\
\frac{dx}{dt} &= \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]} \\
t &= \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} + Konst.
\end{aligned}$$

Etwas Allgemeines lernen wir aus dieser Lösung: eine reelle (und somit physikalische) Lösung existiert nur im Gebiet, wo $E > U(x)$ ist. Diese Gebiete kann

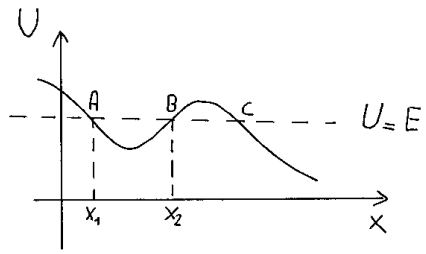


Abbildung 2.1: Graphische Darstellung von $U(x)$

man direkt ablesen, wenn man die potentielle Energie graphisch darstellt. Die Punkte, bei denen $E = U(x)$ ist, sind *Umkehrpunkte* der Bahn, da in ihnen die Geschwindigkeit 0 wird, und sich somit das Vorzeichen ändern kann. Man unterscheidet zwischen endlichen Bahnen, die in einem endlichen Raumgebiet verlaufen können, und unendlichen Bahnen, wenn die Masse ins Unendliche laufen kann. Die eindimensionalen endlichen Bahnen sind Schwingungen: die Masse bewegt sich zwischen den Umkehrpunkten $x_1(E)$ und $x_2(E)$ periodisch, d.h. sie kehrt nach einer gewissen Zeit wieder zurück an einen bestimmten Punkt. Die Periode der Schwingung ist durch den Ausdruck

$$T(E) = 2 \cdot \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}$$

gegeben. *Beispiel.* Nach unserer Vorstellung der chemischen Bindung, die zu ei-

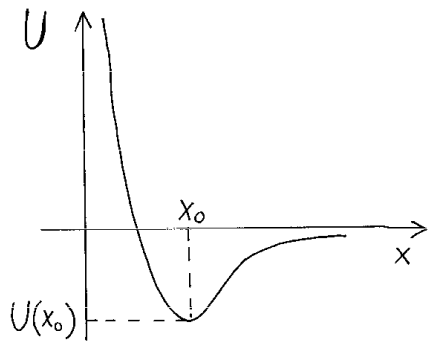


Abbildung 2.2: verlauf der potentiellen Energie bei der chemische Bindung

nem Molekül führt, hat die potentielle Energie zwischen zwei Atomen folgende Abhängigkeit vom Abstand x zwischen den Atomen, siehe Abb.2.2. Aber auch zwischen zwei Atomen in einem Festkörper herrscht ein Potential, das einen ähnlichen Verlauf hat. Dieser Verlauf führt zur chemischen Bindung beim Gleichgewichtsabstand x_0, bei dem U(x) ein Minimum hat. Dabei ist die Bindungsenergie $|U(x_0)|$.

Warum bei x_0 die zwei Atome "gebunden" sind, kann man leicht erklären: sollte ein Atom versuchen, die Gleichgewichtslage zu verlassen, spürt es eine rücktreibende Kraft $-\frac{dU}{dx}$, die es wieder zu x_0 führt. Wenn $E = U(x_0)$ ist, ist das Molekül im Grundzustand. Angeregte Zustände, bei denen E knapp oberhalb des Grundzustandswertes liegt, sind, wie wir gesagt haben, Schwingungen. Wir wollen jetzt die Periode solcher Schwingungen abschätzen. In der Nähe eines Minimums, lässt sich $U(x)$ folgenderweise approximieren:

$$U(x) \approx U(x_0) + (x - x_0) \cdot U'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} U''(x_0)$$

Da $U(x)$ bei x_0 ein Minimum besitzt, ist $U'(x_0) = 0$. Das erste nicht verschwindende Glied ist das proportional zu $(x - x_0)^2$. Damit ist

$$U(x) = U(x_0) + (x - x_0)^2 \frac{U''(x_0)}{2}$$

Diese Näherung, die nur für kleine Schwingungen gilt, heisst *harmonische* Approximation. In dieser Näherung folgt $x_i(E)$ aus der Gleichung $U(x_0) + (x_i - x_0)^2 \frac{U''(x_0)}{2} = E$, d.h. $x_i(E) = x_0 \pm \sqrt{\frac{2(E-U(x_0))}{U''(x_0)}}$. Eingesetzt in den Ausdruck für $T(E)$ ergibt dies

$$\begin{aligned}
T(E) &= 2 \cdot \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x_0) - (x - x_0)^2 \frac{U''(x_0)}{2}}} \\
&= 2 \cdot \sqrt{\frac{m}{U''(x_0)}} \int_{\sqrt{\frac{-2(E-U(x_0))}{U''(x_0)}}}^{\sqrt{\frac{2(E-U(x_0))}{U''(x_0)}}} \frac{dy}{\sqrt{2(E - U(x_0)/U'' - y^2}} \\
&= 2 \cdot \sqrt{\frac{m}{U''(x_0)}} \cdot [arcsin(1) - arcsin(-1)] \\
&= 2\pi \sqrt{\frac{m}{U''(x_0)}}
\end{aligned}$$

Das Bemerkenswerte an diesem Resultat ist, dass T von E unabängig ist. Dies ist aber nur in der harmonischen Näherung gültig. Für die Schwingung definiert man eine Schwingungsfrequenz als $\omega \doteq \frac{2\pi}{T}$. In der harmonischen Näherung ist $\omega = \sqrt{\frac{U''}{m}}$. Die Frequenz ist das fundamentale Charakteristikum von Schwingungen; sie hängt nicht von den Anfangsbedingungen der Bewegung ab, sondern ist vollständig durch die mechanische Eigenschaft des Systems bestimmt. Im Wesentlichen gibt sie Auskunft über die *Krümmung (zweite Ableitung!) der potentiellen Energie in der Nähe der Ruhelage*. Dieses Resultat ist von entscheidender Bedeutung für die Spektroskopie von Molekülen und Festkörpern: durch die spektroskopische Bestimmung der Schwingungsfrequenz lässt sich etwas über die potentielle Energie der Moleküle aussagen!!

In der harmonischen Näherung, lässt sich die Lösung der BG in einer geschlossenen algebraischen Form schreiben:

$$\begin{aligned} \omega t &= \int \frac{dy}{\sqrt{2(E-U(x_0))/U'' - y^2}} + Konst \\ &= arcsin[\frac{y}{\sqrt{2(E-U(x_0))/U''}}] + Konst. \end{aligned}$$

oder

$$x(t) = x_0 + \sqrt{2(E-U(x_0))/U''} \cdot sin(\omega t - \phi)$$

Der Koeffizient $\sqrt{2(E-U(x_0))/U''} \doteq A$ ist die maximale Amplitude der Schwingung um den Gleichgewichtsabstand, ϕ ist die Anfangsphase der Schwingung. Zwischen E und A ist die Beziehung $(E - U(x_0)) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$. Die Energiekonstanz bedeutet, dass beim Durchgang durch die Gleichgewichtslage die totale Energiezunahme $E - U(x_0)$ als reine kinetische Energie im System steckt. In den Umkehrpunkten besteht nur potentielle Energie. Kinetische und potentielle Energien gehen dauernd ineinander über, wobei die Summe konstant bleibt.

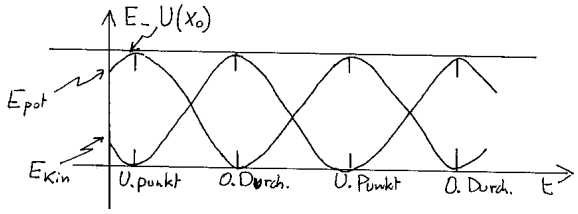


Abbildung 2.3: Kin. und pot. Energie bei der harmonischen Schwingung

2.2 Das Zweikörper-Problem

Das Problem von zwei Massenpunkten m_1, m_2, die mit einer potentiellen Energie der Form $U(|\vec{r_1} - \vec{r_2}|$ wechselwirken, ist von zentraler Bedeutung in der Physik. Vielleicht ist es deswegen wichtig, weil man es exakt lösen kann, ganz im Gegensatz zum Mehrkörperproblem. Exakt lösbare Probleme der Physik sind deshalb sehr wichtig, weil sie "vernünftige" Ansätze für die Lösung komplizierter Probleme liefern, die physikalisch relevanter sind, aber nicht exakt lösbar sind. Deswegen wollen wir dieses Problem ausführlich behandeln.

Wir beginnen mit der Lagrange Funktion, die diesem Problem angemessen ist, nämlich

$$L(\vec{r_i}, \dot{\vec{r_i}}) = \frac{m_1}{2}\dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\vec{r}}_2^2 - U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

Die aus dieser Lagrange Funktion resultierenden BG zeigen ein kompliziertes Verhalten: die BG für $\vec{r_1}$ und $\vec{r_2}$ bilden ein gekoppeltes nicht lineares Differentialgleichungssystem, das mathematisch sehr schwierig zu lösen ist. Wir versuchen durch

die lineare Kombination der Vektoren $\vec{r_1}$ und $\vec{r_2}$ die BG zu entkoppeln. Eine geeignete Linearkombination ist $\vec{r_2} - \vec{r_1} \doteq \vec{r}$. Damit ist die potentielle Energie ein skalares Feld eines einzelnen Vektors . Diese Vereinfachung ist möglich, weil die potentielle Energie nur von $\vec{r_2} - \vec{r_1}$ abhängt. Durch diese Linearkombination entsteht aber in der kinetischen Energie ein gemischter Term der Form $\dot{\vec{r_1}} \cdot \dot{\vec{r}}$. Diesen gemischten Term wollen wir durch die Einführung einer weiteren Linearkombination eliminieren. Wir führen deshalb folgende Transformation in L ein:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{r_1} \\ \vec{r_2} \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} \vec{r} \\ \vec{R} \end{pmatrix}$$

Mit der Wahl $a_i = \frac{m_i}{m_1+m_2}$ erreichen wir die transformierte Lagrange Funktion

$$\begin{aligned} L(\vec{r}, \vec{R}, \dot{\vec{r}}, \dot{\vec{R}}) &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\vec{R}}^2 \\ &+ \frac{1}{2}(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2})\dot{\vec{r}}^2 - U(|\vec{r}|) \end{aligned}$$

Der Ortsvektor $\vec{R}$ bezeichnet den **Schwerpunkt** (oder Massenmittelpunkt)der Massen m_1, m_2. $\vec{r}$ ist der Ortsvektor der **Relativbewegung**. Der Faktor $\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \doteq \mu$ ist die **reduzierte Masse**. Die Lagrange Gleichungen lauten

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)\ddot{\vec{R}} &= 0 \\ \mu\ddot{\vec{r}} &= -\vec{\nabla} U \end{aligned}$$

In den transformierten Koordinaten, sind die BG für $\vec{R}$ und $\vec{r}$ **entkoppelt**. Die BG für $\vec{R}$ hat die Lösung $\vec{R} = V_0 t + R_0$, d.h. der Schwerpunkt bewegt sich auf einer Gerade mit konstanter Geschwindigkeit und beeinflusst die Relativbewegung nicht. Dies ist ein Beispiel für das Prinzip, das in der Physik als das *Galilei'sche Relativitätsprinzip* bekannt ist: Die physikalischen Beobachtungen innerhalb eines Systems sind unabhängig davon, ob das System ruht oder sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Beschreibt die Erde eine elliptische Bahn um die Sonne, so tut sie das, egal ob die Sonne fest am Himmel steht oder sich monoton bewegt. Die Relativbewegung ist zur dreidimensionalen Bewegung eines Einteilchensystems mit Masse μ geworden, das in einem Kraftfeld $-\vec{\nabla} U$ eingebettet ist.

Wir wollen jetzt zeigen, dass die Relativbewegung auf einer Ebene erfolgt, d.h., dass es sich um eine zweidimensionale Bewegung handelt. Wir betrachten die BG $\mu\ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla} U$, und multiplizieren vektoriell beide Seiten mit $\vec{r}$. Da $U = U(|\vec{r}|)$ ist, ist $\vec{\nabla} U$ **parallel** zu $\vec{r}$: die rechte Seite der BG wird 0. Das ist offensichtlich eine Folge davon, dass die potentielle Energie nur vom Betrag von $\vec{r}$ abhängt und dass das resultierende Kraftfeld **zentralsymmetrisch** ist. Die linke Seite lässt sich als $\frac{d[\vec{r} x \mu \dot{\vec{r}}]}{dt}$ schreiben. Daraus ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{d[\vec{r} \times \mu\dot{\vec{r}}]}{dt} &= 0 \\ (\vec{r} \times \mu\dot{\vec{r}}) &\doteq \vec{L} = Konst. \end{aligned}$$

Diese Gleichung besagt, dass der Vektor $\vec{L}$ ein Integral der Bewegung ist: der **Drehimpuls**. $\vec{L}$ zeigt während der ganzen Bewegung in eine feste Richtung. Da $\vec{L}$ als Vektorprodukt von $\vec{r}$ und $\dot{\vec{r}}$ konstruiert wurde, steht er senkrecht zu diesen beiden Vektoren. Die Bahn eines Teilchens in einem zentralsymmetrischen Kraftfeld liegt also vollständig in einer Ebene, die auf $\vec{L}$ senkrecht steht.

Die für die Relativbewegung massgebende Lagrange Funktion kann man in Polarkoordinaten innerhalb der xy Ebene schreiben:

$$L(r,\varphi) = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r)$$

Die dazugehörigen BG sind

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}] &= \frac{\partial L}{\partial \varphi} \Longrightarrow \\
mr\ddot{\varphi} &= -2m\dot{r}\dot{\varphi} \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= \frac{\partial L}{\partial r} \Longrightarrow \\
m\ddot{r} &= mr\dot{\varphi}^2 - \frac{dU}{dr}
\end{aligned}$$

Eine naive Anwendung der Newton'schen Gleichungen hätte zu den (falschen) BG $m\ddot{r} = -U'(r)$ und $m\ddot{\varphi} = 0$ geführt. Der Übergang zu Polarkoordinaten für die Beschreibung der Bahn hat zu zusätzlichen effektiven Kräften geführt (neben der urspr̈nglichen, zentral gerichteten Kraft):

- Die zusätzliche radial gerichtete Kraft heisst *Zentrifugalkraft*. Sie beeinflusst die radiale Bewegung.
- Die für die Änderung der Drehgeschwindigkeit verantworliche Kraft heisst *Coriolis-Kraft*.

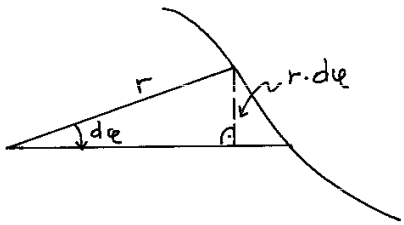
Wenn man wissen will, wie sich Abstand und Drehwinkel ändern, muss man die Gravitationskraft sowie die Zentrifugal- und Coriolis-Kraft berücksichtigen.

Wir wollen jetzt die BG integrieren. $mr\ddot{\varphi} = -2m\dot{r}\dot{\varphi}$ lässt sich auch schreiben als

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = 0$$

mit der Lösung $mr^2\dot{\varphi} = Konst. = |\vec{L}| \doteq L$. Diese Lösung hat eine eine einfache geometrische Deutung. Der Ausdruck $1/2r^2 d\varphi$ stellt die Fläche des Sektors dar, der von zwei unendlich dicht benachbarten Radiusvektoren und dem dazwischenliegenden Bahnelement gebildet wird. Wir bezeichnen diese Fläche mit *df* und schreiben den Drehimpuls der Masse als $2m\dot{f}$. Die Ableitung von f- die *Flächengeschwindigkeit* ist eine Konstante: *In gleichen Zeitintervallen überstreicht der Ortsvektor die gleiche Fläche (Flächensatz, 2. Satz von Kepler).* Einsetzen von $\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}$ in der radialen BG ergibt

$$m\ddot{r} = \frac{L^2}{mr^3} - U'(r) = -\frac{d[L^2/2mr^2 + U(r)]}{dr} \doteq -\frac{dU_{eff}}{dr}$$



d.h. die radiale Bewegung entwickelt sich als würde sich die Masse m in einem effektiven radialen Kraftfeld befinden. Dieses Kraftfeld besteht aus der Zentrifugalkraft und der Gravitationskraft und lässt sich schreiben als die radiale Ableitung einer effektiven potentiellen Energie, die sich aus der Summe der Zentrigfugalenergie und der potentiellen Energie der Gravitation zusammensetzt. Formell ist die radiale Bewegung zu einem eindimensionalen Problem reduziert worden. Daraus

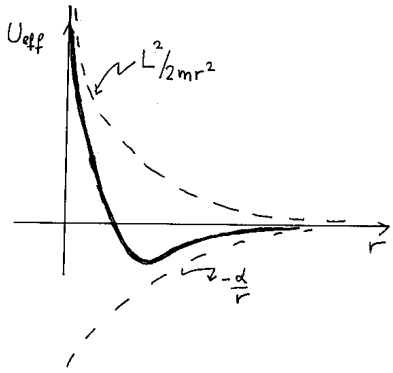


Abbildung 2.4: U_{eff} als Funktion von r

folgt

$$\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U_{eff}(r) = Konst. = E$$

d.h. die D.G.

$$\dot{r} = \frac{2}{\mu}\sqrt{E - U_{eff}(r)}$$

Von besonderer Bedeutung sind solche Werte r, für welche $E = U_{eff}(r)$gilt. An diesen Punkten ist die radiale Geschwindigkeit genau 0. Das bedeutet nicht, dass die Masse μ anhält, da die Drehgeschwindigkeit, gegeben durch $L/(mr^2)$, endlich bleibt. Diese Punkte sind Wendepunkte der Bahn, wo r aufhört zu wachsen und beginnt kleiner zu werden. Man kann, je nach Wert von E, mindestens zwei Klassen von Bahnen unterscheiden. Wenn $E = E_>$ ist, dann existiert nur eine Lösung der Gleichung. $r_>$ ist dann ein minimaler Radius, den die Bahn annehmen kann. Es

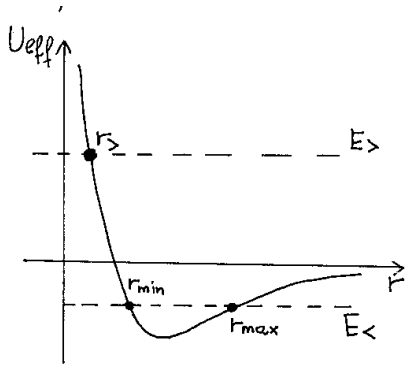


Abbildung 2.5: Zur definition der Wendepunkte

existiert kein maximaler Radius – die Masse kommt aus weiter Entfernung, kehrt bei $r_>$ um und verschwindet wieder ins Nichts: die Bewegung des Teilchens ist infinit. Diesen Bahnen folgen zum Beispiel die Kometen. Ist $E = E_<$ dann existiert

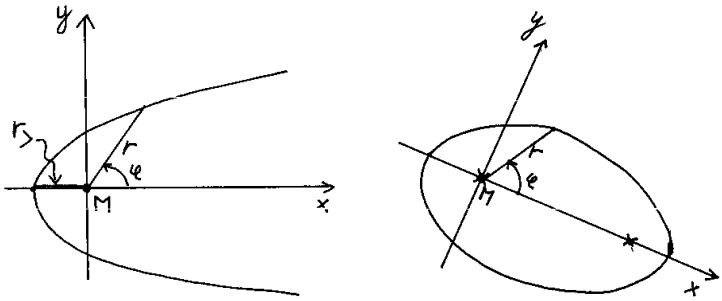


Abbildung 2.6: Mögliche Bahnen im Gravitationsfeld

ein minimaler (r_{min}) und ein maximaler (r_{max}) Radius: Die Bahn ist finit und verläuft vollständig in einem ringförmigen Gebiet. Das bedeutet aber nicht, dass die Bahn *geschlossen* ist (geschlossen bedeutet, dass nach bestimmten Zeiten die Bahn immer wieder an denselben Ort zurückkehrt). In der Tat werden geschlossene Bahnen dann und nur dann beobachtet, wenn $U(r) = 1/r$ (Kepler Problem!) oder r^2 ist. Bei beliebigen r-Abhängigkeiten sind geschlossene Bahnen äusserst selten; stattdessen hat man sog. *Rosettenbahnen.* Die Zentrifugalbarriere ($L \neq 0$)sorgt im Allgemeinen dafür, dass die Masse niemals zum Mittelpunkt des Feldes gelangt, auch dann nicht, wenn das Feld anziehend ist.

Man kann zeigen, dass die geschlossenen Bahnen beim Kepler Problem *Ellipsen* sind. Dies steht in Einklang mit den Beobachtungen (1. Satz von Kepler). Die Sonne befindet sich auf einem Fokus der Ellipse.

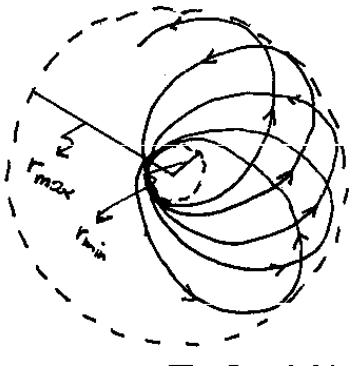


Abbildung 2.7: Rosettenbahn

Die nicht geschlossenen Bahnen ($E > 0$) sind Hyperbel.

Eine spezielle Bahn liegt vor, wenn E gleich dem Minimum der effektiven potentiellen Energie ist. Dann ist $r_{min} = r_{max} = r_0$. Die Bahn ist in diesem Spezialfall ein Kreis, $\dot{r} = 0$. Es gibt keine Corioli Kraft, so dass auch $\ddot{\varphi} = 0$ ist. Die Drehgeschwindigkeit ist dann eine Konstante, nämlich $L/(2mr_0)$. Da die Kreisbahn einem Minimum der radialen potentiellen Energie entspricht, summieren sich die radialen Kräfte exakt auf Null.

Kapitel 3

Integrale der Bewegung und Symmetrien

.

Bei der Bewegung eines mechanischen Systems ändern sich die $2f$ Grössen $q_1, ..., q_f$ unf $\dot{q}_1, ...\dot{q}_f$ mit der Zeit t. Es gibt Funktionen $f(q, \dot{q})$ dieser Grössen, die bei der Bewegung ihren Wert erhalten und nur von den Anfangsbedingungen abhängen. Diese Grössen heissen Erhaltungsgrösse oder Integrale der Bewegung. Einige davon, die eine erste Integration der BG geliefert haben, haben wir schon getroffen: E und $\vec{L}$. Wieviele Integrale der Bewegung gibt es? Eine einfache Überlegung führt zur Antwort. Man stelle sich vor, dass es uns gelungen ist, die BG vollständig zu integrieren. Die produzierten $2f$ Funktionen lauten

$$q_s = q_s(t + t_0, C_1, ..., C_{2f-1})$$
$$\dot{q}_s = \dot{q}_s(t + t_0, C_1, ..., C_{2f-1})$$

wobei wir eine der Integrationskonstanten in der Form einer zu t additiven Konstante gewählt haben. Auflösen dieser Gleichungen nach Cj und Elimination der Zeit erlaubt, diese Konstanten - welche nur von den Anfangsbedingungen abhängen - als Funtkion von $q, \dot{q}$ auszudrücken. Bei der Konstruktion sind diese $2f - 1$ Funtionen die Integrale der Bewegung. Unter diesen Funktionen befinden sich einige, die eine besondere Bedeutung haben. Das sind solche Erhaltungsgrössen, die aus allgemeinen Symmetriebetrachtungen hergeleitet werden können. Diese Erhaltungsgrössen können ermittelt werden, ohne irgendeinen Schritt zur Lösung der BG eingeleitet zu haben: sie hängen eben nur von der "Symmetrie" des Systems ab und treten bei allen Problemen auf, die die gleichen Symmetrien haben. Durch Symmetrieüberlegungen könnte es uns gelingen, eine teilweise Integration der BG zu erzielen, ohne dass wir viel Geschick besitzen (Geschick war nämlich im Spiel, als wir die BW im Kap. 2 "geschickt" mit einem Faktor multiplizierten, der dann zur Energie und Drehimpulserhaltung geführt hat!). Deswegen spielen *Symmetrien* eine sehr wichtige Rolle in der modernen Physik. Die Suche nach einer einheitlichen Beschreibung der Natur beginnt und endet mit der Frage nach der in der Natur

zugrunde liegenden Symmetrien (von den Himmelskörpern bis zu den Quarks).

Was meinen wir aber mit dem Satz "Symmetrie eines Systems"? Und wie führen Symmetrien zur Existenz von Erhaltungsgrössen? Die Physik gibt auf diese Fragen eine ganz präzise Antwort, die eigentlich ziemlich universell ist. Es macht deshalb Sinn, die Frage jetzt in der Mechanik zu behandeln.

3.1 Erhaltung der Energie

Wir beginnen mit dem Erhaltungssatz, der aus der *Homogenität* der Zeit folgt. Wir untersuchen das Verhalten von L unter der Zeitverschiebung $t \to t + \epsilon$ für ein abgeschlossenes System, wobei L nicht explizit von der Zeit abhängt. Dieses Verhalten ist so zu verstehen: Die potentielle Energie enthält den Abstand zwischen den Massen, der sich mit der Zeit verändert. Eine Zeittranslation bewegt die Massen entlang der Bahn und führt deswegen zu einer Änderung des Ortsvektors $\delta q \doteq q(t+\epsilon) - q(t) = \dot{q}\epsilon$ und der potentiellen Energie. Das Gleiche erfährt die kinetischen Energie, wobei $\delta\dot{q} \doteq \dot{q}(t+\epsilon) - \dot{q}(t) = \ddot{q}\epsilon$ ist. Sollten sich beispielsweise auch die Massen mit der Zeit ändern, (etwa durch Streuung in den Weltraum), dann würde L einen zusätzlichen Term bekommen, der aber in einem abgeschlossenen System verboten ist. Die Variation $\delta L \doteq L(t+\epsilon) - L(t) = \frac{dL}{dt}\epsilon$ berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{dL}{dt}\epsilon &= \sum_i [\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i] \\
&= \sum_i [\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i \cdot \epsilon + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \cdot \epsilon] \\
&= \epsilon \sum_i [\dot{q}_i \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i]
\end{aligned}$$

Wenn wir fordern, dass $\delta L = 0$, dann folgt die Gleichung

$$\frac{d}{dt}[\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L] = 0$$

Hieraus folgt die Erhaltungsgrösse

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = E$$

die bei der Bewegung eines abgeschlossenen Systems erhalten bleibt. Diese Grösse heisst die Energie eines Systems. In kartesischen Koordinaten ist $E = 1/2 \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} + U(\vec{r}_1, ...\vec{r}_f)$, d.h. die Summe der kinetischen und der potentiellen Energie.

Integrale der Bewegung führen nicht nur zur teilweisen Integration der BG, sondern man kann daraus auch Schlüsse über die Zustände des Systems zu ausgewählten Zeiten der Bahn ziehen, ohne die Bahn genau zu kennen.

Beispiel: Hebelarmgesetz. Man betrachte einen Hebel wie in der Figur. Zur Zeit $t = 0$ seien beide

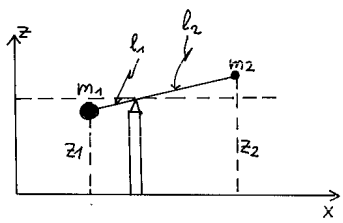


Abbildung 3.1: Zur Herleitung des Hebelarmgesetzes

Massen auf der gleichen Höhe D in Ruhe. Lässt man sie los, werden sie ihre Gleichgewichtslage nur erreichen, wenn l_1 und l_2 geeignet gewählt werden. Um l_1 und l_2 zu bestimmen, schreiben wir den Energiesatz.

$$E(t=0) = m_1 g D + m_2 g D$$

Die Gleichgewichtsbedingung ist $\dot{z}_1 = \dot{z}_2 = 0$. Eingesetzt in den Energiesatz ergibt dies die bekannte Hebelarmgleichung.

$$\begin{aligned} m_1 g D + m_2 g D &= \overbrace{\frac{1}{2} m_1 \dot{z}_1^2}^{0} + \overbrace{\frac{1}{2} m_2 \dot{z}_2^2}^{0} + m_1 g z_1 + m_2 g z_2 \\ &\text{Mit } z_1 = D - l_1 \sin\alpha \text{ und } z_2 = D + l_2 \sin\alpha \\ \Rightarrow\ m_1 g D + m_2 g D &= m_1 g D + m_2 g D - m_1 g l_1 \sin\alpha + m_2 g l_2 \sin\alpha \\ \Leftrightarrow\ m_1 l_1 &= m_2 l_2 \end{aligned}$$

Beispiel: Fluchtgeschwindigkeit von der Erde. Eine Masse m soll von der Erde unendlich weit weg transportiert werden. Mit welcher Geschwindigkeit soll man sie von der Erdoberfläche wegschiessen?
Um aus dem Schwerfeld der Erde entweichen zu können, bedarf es mindestens einer Geschwindigkeit von 0 beim Erreichen von $r = \infty$. Die Erhaltung der Energie ergibt die Gleichung

$$\underbrace{\frac{m}{2} v_F^2}_{E_{kin}} - \underbrace{\gamma \frac{m M_E}{R_E}}_{E_{pot}} = 0$$

M_E : Masse der Erde
R_E : Erdradius
v_F : Fluchtgeschwindigkeit

Damit ist $v_F = 11.2 km/sec = 40'320 km/Stunde$.

3.2 Die Impulserhaltung

Eine weitere mögliche Symmetrie der Lagrange Funktion ist die *Translationsinvarianz.* Diese bedeutet folgendes: Man nehme alle Ortsvektoren und füge instantan einen festen beliebigen Vektor $\vec{\varepsilon}$ hinzu: $\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_i + \vec{\varepsilon}$. Sollte, nach dieser

Transformation, die Lagrange Funktion gleich aussehen wie vor der Transformation, dann ist das System translationsinvariant. Abgeschlossene Systeme mit potentieller Energie, die nur von Differenzvektoren abhängen, sind translationsinvariant. Mit $\delta\vec{r}_i = \vec{\varepsilon}$ und $\delta\dot{\vec{r}} = 0$ bekommen wir

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}\delta\vec{r}_i = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}\cdot\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}(\sum_i \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i})$$

Die Translationsinvarianz fordert $\delta L = 0$, für jeden ε. Das führt zu

$$\frac{d}{dt}\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = 0,$$

d.h. die Grösse $\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \doteq \vec{P}$ ist ein Integral der Bewegung, und heisst *Gesamtimpuls* aller Massenpunkte. Solange L translationsinvariant ist, bleibt das Gesamtimpuls erhalten. Durch Differenzieren der Lagrange Funktion finden wir, dass der Impuls sich folgendermassen durch die Geschwindigkeit der Massenpunkte ausdrückt:

$$\vec{P} = \sum_i m_i\dot{\vec{r}}_i,$$

d.h. der Impuls ist die Summe aller der Impulse der einzelnen Massen.

Die Impulserhaltung haben wir schon in Kap. 2 benutzt, zwar nicht offensichtlich aber entscheidend für eine Vereinfachung des Zweikörperproblems. Die Konstanz von $\vec{P}$ kann man in der Tat benutzen, um einen fiktiven Ortsvektor X zu definieren, der trotz der Komplikation eines Mehrkörperproblems, eine geradlinige Bewegung durchführt, mit konstanter Geschwindigkeit: In der Tat,

$$\vec{X} \doteq \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

mit der Masse $\sum_i m_i$ hat den Impuls $\vec{P}$. $\vec{X}$ bezeichnet den *Ort des Schwerpunktes* des Massensystems. Die Impulserhaltung führt deswegen zur gleichmässigen Bewegung des Schwerpunktes und suggeriert eine geeignete Linearkombination von Ortsvektoren, die beim Zweikörperproblem zu einer enormen Vereinfachung des Problems geführt hat.

Die Bedingung $\sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0$ ist zur Aussage $\sum_i \vec{K}_i = 0$ äquivalent, d.h. die Summe aller Kräfte ist null. Die Impulserhaltung gilt koordinatenweise, d.h. die drei Komponenten des Gesamptimpulses sind getrennt erhalten. Sollte in einer gegebenen Richtung ein homogenes externes Kraftfeld $\vec{F}$ herrschen, dann sind nur solche Komponenten erhalten, die zum Kraftfeld senkrecht sind. $\vec{X}$ bewegt sich mit der BG $(\sum_i m_i)\ddot{\vec{X}} = \vec{F}$.

Die Impulserhaltung hat, wie die Energieerhaltung, eine weitere Anwendung in der Physik: sie dient dem Zweck, Aussagen über gewisse Vorgänge zu machen, ohne eigentlich die BG lösen zu müssen - wenn nur die Lage zu bestimmten Zeiten gesucht ist. Zu diesem Punkt merke man, dass der Gesamtimpuls immer die Summe aller Impulse ist, unabhängeig von der Existenz oder der Art

der Wechselwirkung. Ein besonders illustratives Beipiel der Impulserhaltung ist die Herleitung der *Raketengleichung.*

Eine Rakete enthält einen Vorrat von Atomen, von denen jedes die Masse dm besitze, und eine Maschine, die die Atome relativ zur Rakete beschleunigt und mit der Geschwindigkeit u relativ zur Rakete hinten ausstösst. Beim Start sei die Rakete in Ruhestellung. Die Startmasse der Rakete sei

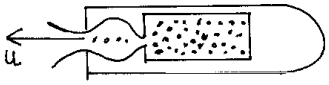


Abbildung 3.2: Schema einer Rakete

M_0. Wir betrachten eine horizontal zur Erde gerichtete Rakete. Da keine äusseren Kräfte wirken, bleibt der Gesamtimpuls des Systems "Rakete + ausgestossene Atome" konstant. Diese Kostante ist 0, da die Rakete beim Start in Ruhe ist. Unser Bezugssystem befindet sich dort, wo die Rakete zur Zeit $t = 0$ in Ruhe ist (und wo der Schwerpunkt bleibt).

1. Schritt: Wir benutzen die Konstanz des Gesamtimpulses :

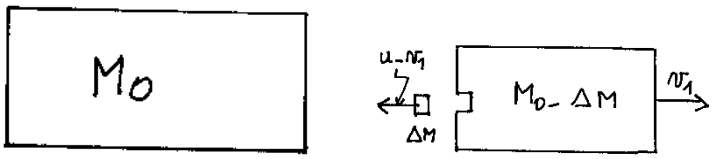


Abbildung 3.3: 1. Schritt

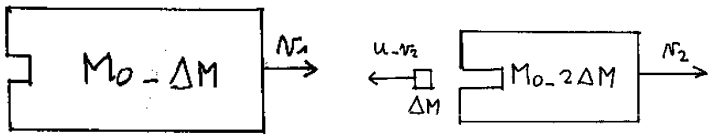


Abbildung 3.4: 2. Schritt

$$0 = \vec{P} \text{ vor dem ersten Austoss} = \vec{P} \text{ nach dem ersten Austoss}$$
$$= -\Delta M(u - v_1) + (M_0 - \Delta M)v_1$$

Aufgelöst:

$$v_1 = \frac{\Delta M}{M_0} u$$

2. Schritt

$$(M_0 - \Delta M)v_1 = -\Delta M(u - v_2) + (M_0 - 2\Delta M)v_2$$

Aufgelöst:

$$v_2 = v_1 + \frac{\Delta M u}{M_0 - \Delta M}$$

3. n-ter Schritt

$$v_n = v_{n-1} + \frac{\Delta M u}{M_0 - (n-1)\Delta M}$$

Der Geschwindigkeitszuwachs von Schritt zu Schritt beträgt

$$\Delta v = v_n - v_{n-1} = \frac{\Delta M u}{M_0 - (n-1)\Delta M} \approx \frac{\Delta M u}{M_0 - n\Delta M}$$

Die Anzahl n der ausgestossenen Atome ist so gross, dass man $(n-1)$ durch n ersetzen kann, ohne viel falsch zu machen.

Wir berücksichtigen jetzt, dass in einer Zeit dt ein Atom ausgestossen wird, sodass – zur Zeit t – $n = t/dt$ Atome ausgestossen werden. Die ausgestossene Masse ist $n \cdot dm = dm \cdot t/dt$. dm/dt ist eine Eigenschaft der Maschine, die in der Rakete steckt: Nennen wir sie $dm/dt = C$. Obige Gleichung wird dann zu

$$dv = \frac{C \cdot u \cdot dt}{M_0 - ct} \Leftrightarrow \dot{v} = \frac{C \cdot u}{M_0 - ct}$$

Die Summe des Geschwindigkeitszuwachses dv vom Start $(t = 0)$ bis zur Zeit t, ergibt die Geschwindigkeit der Rakete zur Zeit t:

$$v(t') = \int_0^{t'} dv = \int_0^{t'} \frac{C \cdot u \cdot dt}{M_0 - c \cdot t} = -u \cdot ln(M_0 - C \cdot t) \Big|_0^{t'}$$

Nun ist $M_0 - C \cdot t$ gerade die Masse der Rakete zur Zeit t, so dass man schreiben kann

$$v(t) = u \cdot \ln \frac{M_0}{M_t}$$

Typische Werte für die Ausstossgeschwindigkeit liegen bei 4000 m/sec für ein Wasserstoff-Sauerstoff-Brennstoffgemisch bei einer Gastemperatur von 4000^0C, sodass eine Rakete beträchtliche Geschwindigkeiten erreichen kann, wenn z.B. der Brennstoffvorrat etwa die Hälfte der Gesamtmasse der Rakete beträgt.

Die Beschleunigung der Rakete ist $\dot{v} = (C \cdot u)/(M_0 - C \cdot t)$. Die Beschleunigung kann der Schubkraft des Raketenantriebes zugeschrieben werden. Die Schubkraft ist

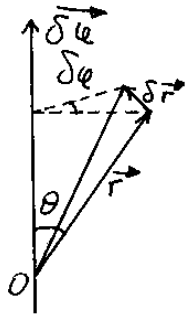
$$K_{Schub} = (M_0 - C \cdot t)\frac{dv}{dt} = C \cdot u$$

Die Schubkraft ist das Produkt der Geschwindigkeit, mit der die Atome ausgestossen werden, mal der Anzahl der Atome, die pro Zeiteinheit ausgestossen werden.

Dieses Beispiel zeigt, dass wieder einmal ein Erhaltungssatz zum Aufbau einer DG benutzt wurde.

3.3 Die Drehimpulserhaltung

Eine weitere mögliche Symmetrie eines Systems ist die Rotationsinvarianz. Man stelle sich vor, alle Ortsvektoren seien instantan um eine gemeinsame Achse gedreht. Falls L nach der Tansformation so aussieht wie vorher, dann ist L rotationsinvariant. Zum Beipiel, eine nur vom Abstand abhängige potentielle Energie führt zur Rotationsinvarianz von L. Um die Rotationsinvarianz mathematisch zu formulieren, führen wir den Vektor $\delta\vec{\phi}$ einer infinitesimalen Drehung ein, deren Betrag gleich dem Drehwinkel $\delta\phi$ ist und deren Richtung mit der Drehachse zusammenfällt. Danach untersuchen wir, wie sich als Konsequenz dieser Drehung



der Ortsvektor $\vec{r}$ ändert.

Durch diese Drehung ändert sich der Abstand r nicht. Die lineare Verschiebung des Endes des Ortsvektors ist mit dem Winkel $\delta\phi$ durch die Gleichung $|\vec{\delta r}| = r sin\Theta\delta\phi$ dargestellt, siehe Figur. Der Vektor $\delta\vec{r}$ steht senkrecht auf der durch $\vec{r}$ und $\vec{\delta\phi}$ aufgespannten Ebene. Folglich ist

$$\delta\vec{r_i} = \delta\vec{\phi} \times \vec{r_i}$$
$$\delta\dot{\vec{r_i}} = \delta\vec{\phi} \times \dot{\vec{r_i}}$$

und

$$\delta L = \sum_i \overbrace{\frac{\partial L}{\partial \vec{r_i}}}^{m\ddot{\vec{r_i}}} \delta\vec{r_i} + \overbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r_i}}}}^{m\dot{\vec{r_i}}} \delta\dot{\vec{r_i}} = \sum_i [m\ddot{\vec{r_i}}(\delta\vec{\varphi} \times \vec{r_i}) + m\dot{\vec{r_i}}(\delta\vec{\varphi} \times \dot{\vec{r_i}})] =$$
$$= \sum_i [m\delta\vec{\varphi}(\vec{r_i} \times \ddot{\vec{r_i}}) + m\delta\vec{\varphi}(\dot{\vec{r_i}} \times \dot{\vec{r_i}})] =$$
$$= \delta\vec{\varphi} \cdot \sum_i \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\dot{\vec{r}})$$

Setzen von δL für alle $\delta\vec{\varphi}$ zu Null ergibt die Erhaltungsgrösse

$$\sum_i \vec{r_i} \times m\dot{\vec{r_i}} \doteq \vec{L}$$

Der Vektor $\vec{L}$ wird *Drehimpuls* genannt. Die Erhaltung des Drehimpulses haben wir benutzt, um die Relativbewegung beim Zweikörperproblem auf einer Ebene zu vereinfachen. Wie beim Impuls, ist auch $\vec{L}$ komponentenweise erhalten. In einem Kraftfeld ist aber nur die Komponente erhalten, die entlang einer Symmetrieachse läuft. Damit eine Symmetrieachse existiert, muss L gegenüber der Drehung um diese Achse invariant bleiben.

3.4 *Skaleninvarianz

Eine weitere mögliche Symmetrie eines mechanischen Systems ist die *Skaleninvarianz*. Diese Symmetrie erlaubt, wichtige Schlüsse über die Eigenschaften der Be-

wegung zu ziehen, ohne explizit die BG zu lösen. Skaleninvarianz spielt in vielen Gebieten der Physik eine wichtige Rolle. Beispielsweise in der Nähe eines Phasenübergangs, besitzt ein makroskopisches System die Skaleninvarianz, und diese Tatsache legt sein Verhalten ziemich eindeutig fest, ohne dass viel über die Einzelheiten der für den Phasenübergang verantworlichen Wechselwirkung bekannt sein muss. Wir wollen am Beispiel der Mechanik diese wichtige Symmetrie beschreiben.

Wir untersuchen den Fall, wo die potentielle Energie eine homogene Funktion der Koordinaten ist:

$$U(\alpha\vec{r}_1, ..., \alpha\vec{r}_f) = \alpha^k U(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_f)$$

Hierin ist α eine beliebige Konstante und k der Grad der Homogenität der Funktion. Wir führen nun eine Transformation durch, bei welcher alle Koordinaten mit der Konstante α multipliziert werden, und die Zeit mit der Konstante β: $\vec{r}_i \to \alpha\vec{r}_i$, $t \to \beta t$. Durch diese Transformation wird L zu

$$L(\alpha\vec{r}_i, \frac{\alpha}{\beta}\dot{\vec{r}}_i) = \frac{\alpha^2}{\beta^2}\sum_i \frac{1}{2}m_i\dot{\vec{r}}_i^{\,2} - \alpha^k U(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_f)$$

Wenn man α und β durch die Bedingung $\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \alpha^k \leftrightarrow \beta = \alpha^{1-\frac{k}{2}}$ verknüpft, bekommt die Lagrange Funktion den selben Vorfaktor α^k, d.h. die BG bleiben unverändert. Multiplikation aller Koordinaten mit dem selben Faktor führt zu neuen Bahnen, die den Ursprünglichen ähnlich sind und sich lediglich in den linearen Abmessungen von ihnen unterscheiden. Auf diesen geometrisch ähnlichen Bahnen verhalten sich alle Zeitdifferenzen zwischen entsprechenden Bahnpunkten wie $\frac{t'}{t} = (\frac{l'}{l})^{1-\frac{k}{2}}$, wobei $\frac{l'}{l}$ das Verhältnis der linearen Abmessung zweier Bahnen darstellt.

Beispiel 1. Nehmen wir unser vertrautes Galilei Experiment. Multipliziert man die Koordinate l mit einer Zahl, so wird die Masse tiefer gebracht, sagen wir zum Punkt $l' = \alpha l$. Damit die gleichen BG gelten, muss sich die Zeit zu $t' = t \cdot \alpha^{\frac{1}{2}}$($k = 1$ im homogenen Feld der Erde) transformiert haben. Das ergibt $\frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{l'}{l}}$. Das ist das Fallgesetz von Galileo, hergeleitet allein aus Symmetrieüberlegungen, ohne einmal die BG formuliert zu haben.

Beispeil 2. Für die potentielle Energie zwischen zwei Massen gilt $k = -1$. Die Multiplikation der Koordinate mit einer Zahl bewirkt den Übergang auf eine ähnliche Ellipse. Die Gleichung $\frac{t'}{t} = (\frac{l'}{l})^{\frac{3}{2}}$ besagt, dass die Quadrate der Umlaufzeiten mit der dritten Potenz der Dimension der Ellipse variieren. Das ist ein eleganter Beweis des 3. Keplerschen Gesetzes.

Beispeil 3. Für eine eindimensionale Bewegung mit $k = 2$ (harmonische Oszillator) bedeutet die Gleichung $\frac{t'}{t} = (\frac{l'}{l})^0$, dass die Zeiten für eine vollständige Schwingung nicht von deren Amplitude abhängen.

Kapitel 4

Schwingungen

Wie wir in Kap. 1 gesehen haben, sind Schwingungen ein sehr verbreiteter Bewegungstyp mechanischer Systeme. Sogar Moleküle und Festkörper können zum Schwingen gebracht werden, und die spektroskopische Untersuchung solcher Schwingungzustände ist ausserordentlich nützlich, sowohl in der Physik als auch in der Chemie und Biologie. Schwingungen sind wichtige *angeregete* Zustände von Molekülen und Festkörpern.

4.1 Eindimensionale harmonische Schwingung

Obwohl wir die wesentlichen Merkmale der harmonischen eindimensionalen Schwingung um die Ruhelage schon physikalisch untersucht haben, wollen wir diese als Ausgangspunkt zu einer systematischen Untersuchung komplizierterer Arten von Schwingungen zusammenfassen. Wir bezeichnen die eindimensionale Koordinate als x, die eine Schwingung durchläuft.

Lösung von linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. In einer linearen DG 2. Ordnung kommen x, $\dot{x}$, $\ddot{x}$ linear vor:

$$A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx + D = 0 \quad ,$$

wobei A, B, C, D Funktionen von t sein können. Wenn der Term D fehlt, nennen wir die Gleichung homogen. Die allgemeine Lösung der hom. DG ist die lineare Kombination zweier linear unhabhängiger Lösungen: $x_{hom}(t) = C_1 x_1^h(t) + C_2 x_2^h(t)$. Wenn man eine spezielle Lösung x_{sp} einer inhomogenen linearen Differentialgleichung gefunden hat, erhält man die allgemeine Lösung der inhom. DG durch $x_{inhom.}(t) = x_{sp}(t) + x_{hom}(t)$. **Beispiel: Homogene lineare Gleichungen mit konstanten Koeffizienten** (A, B, C). Solche DG löst man mit dem Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}$. Aus der homogenen Differentialgleichung erhält man, durch Einsetzen, die algebraische Gleichung für λ, $A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$. Sie wird charakteristische Gleichung genannt. Ihre zwei Lösungen geben, wenn sie nicht gerade zusammenfallen, zwei Lösungen der Differentialgleichung und damit die allgemeine Lösung $x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$.

Wir wollen jetzt diese Betrachtungen für die formale Lösung der Gleichung $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ anwenden. Diese Gleichung ist die zur Lagrange Funktion $L =$

$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$ gehörige Lagrange Gleichung, mit $\omega \doteq \sqrt{\frac{k}{m}}$. Die dazugehörige charakteristische Gleichung ist $\lambda^2 + \omega^2 = 0$, so dass die allgemeine Lösung ist $x(t) = C_1 cos(\omega t) + C_2 sin(\omega t) = Ason(\omega t + \varphi)$, mit

1. ω : Kreisfrequenz
2. A: maximale Amplitude
3. φ: Phasenwinkel
4. $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$: Frequenz
5. $T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$: Schwingungsdauer

Einige Spezialfälle verdienen besondere Beachtung.

1. Wir lenken den Oszillator anfangs um x_0 aus, lassen ihn dann los und betrachten seine Schwingung. Die Anfangsbedingungen lauten offenbar $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = 0$. Die Lösung zu diesen Anfangsbedingungen ist deshalb $x(t) = x_0 \cos \omega t$. Die Anfangselongation ist gleichzeitig die maximal Amplitude der Schwingung.

2. Wir stossen den Körper in seiner Ruhelage an und verleihen ihm die Geschwindigkeit v_0, $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$. Dies führt zu $x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$. Die maximale Amplitude der Schwingung ist somit $A = \frac{v_0}{\omega}$.

4.2 Erzwungene Schwingung

Wir gehen nun zur Betrachtung von Schwingungen eines Systems über, auf das ein äusseres veränderliches Feld wirkt. Derartige Schwingungen heissen *erzwungene Schwingungen* im Gegensatz zu den im vorherigen Paragraphen untersuchten *freien Schwingungen*. Bei der Anwesenheit eines äusseren Feldes besitzt das System neben der eigenen potentiellen Energie $1/2kx^2$ ausserdem die potentielle Energie $U(x,t)$, die von der Wirkung des äusseren Feldes herrührt. Wenn wir dieses Zusatzglied in einer Potenzreihe von der kleinen Grösse x entwickeln, erhalten wir

$$U(x,t) = U(0,t) + x \frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{x=0}$$

Das erste Glied hängt nur von der Zeit ab und kommt bei der Aufstellung der BG nicht vor. Im zweiten Glied ist $-\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{x=0}$ die äussere Kraft, die auf das System in der Gleichgewichtslage wirkt und eine vorgegebene Funktion der Zeit ist. Wir bezeichnen sie mit $F(t)$. Damit erscheint in der potentiellen Energie das Glied $-x \cdot F(t)$, so dass die Lagrange Funktion des Systems lautet

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2 + x \cdot F(t)$$

Die entsprechende BG ist

$$\ddot{x} + \omega^2 \cdot x = \frac{1}{m} F(t)$$

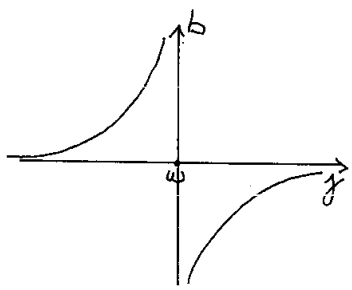
wo wir wiederum die Frequenz ω der freien Schwingung eingeführt haben. Wir betrachten nun einen Fall von besonderem Interesse, bei dem die äussere Kraft ebenfalls eine einfache periodische Funktion der Zeit mit der Frequenz γ ist: $F(t) = f \cdot \cos \gamma t$ darstellt. Um eine spezielle Lösung zu suchen, führen wir den Ansatz $x_{sp} = b \cos \gamma t$ durch, mit dem gleichen periodischen Faktor. Einsetzen in die DG ergibt die charakteristische Gleichung

$$b\gamma^2 - b\omega^2 + \frac{f}{m} = 0$$

deren Lösung $b = \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)}$ ist. Die allgemeine Lösung der inhom. DG ist

$$A \cos(\omega t + \varphi) + \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)} \cos \gamma t$$

Die freien Konstanten A und φ bestimmen sich aus den Anfangsbedingungen. Das bedeutet, dass das System unter der Wirkung äusserer periodischer Kräfte eine Bewegung ausführt, die sich aus zwei Schwingungen zusammensetzt. Aus einer Schwingung mit der Eigenfrequenz ω des Systems und aus einer Schwingung mit der Frequenz γ der äusseren Kraft. Der Verlauf der Amplitude der speziellen Lösung ist in der folgenden Skizze dargestellt: Die negative Amplitude für



$\gamma \geq \omega$ kann man auch als positive Amplitude einer um $-\pi$ verschobenen $\cos \gamma t$ darstellen, d.h. die Lösung lässt sich als

$$A \cos(\omega t + \varphi) + |\frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)}| \cos \gamma t, \gamma < \omega$$

$$A \cos(\omega t + \varphi) + |\frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)}| \cos(\gamma t - \pi), \gamma > \omega$$

darstellen.

Die gegebene Lösung gilt nicht im Fall der sog. *Resonanz*, d.h. wenn die Frequenz der äusseren Kraft mit der Eigenfrequenz des Systems zusammenfällt. Um die allgemeine Lösung der BG in diesem Falle zu finden, versuchen wir eine spezielle Lösung mit dem Ansatz

$$x_{sp} = b(\cos\gamma t - \cos\omega t)$$

zu finden. Die Motivation für diesen Ansatz ist die folgende: In der vorigen Lösung strebte der Denominator für $\gamma \to \omega$ nach Null. Damit diese Divergenz auf irgendeine Weise kompensiert wird und eine wohldefinierte Lösung existiert, müssen wir dafür sorgen, dass auch der Numerator für $\gamma \to \omega$ nach 0 strebt. Einsetzen in der DG (zuerst nehmen wir formell $\gamma \neq \omega$) ergibt

$$\begin{aligned} -b\gamma^2\cos\gamma t + b\omega^2\cos\omega t + b\omega^2(\cos\gamma t - \cos\omega t) &= \\ = b(\omega^2 - \gamma^2)\cos\gamma t &= \\ = \frac{f}{m}\cos\gamma t \\ b = \frac{f}{m(\omega^2-\gamma^2)} \end{aligned}$$

Die Funktion, die die Lösung im Fall der Resonanz darstellt, finden wir als Resultat von

$$\begin{aligned} &\lim_{\gamma\to\omega}[\frac{f}{m(\omega^2-\gamma^2)}(\cos\gamma t - \cos\omega t)] \overset{\gamma=\omega+\varepsilon}{=} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}[\frac{f}{m(2\omega+\varepsilon)(-\varepsilon)}\cos((\omega+\varepsilon)t) - \cos\omega t] \end{aligned}$$

Durch Benutzung der triginometrischen Identität $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \cos((\omega+\varepsilon)t) - \cos\omega t &= \cos\omega t\cdot\cos\varepsilon t - \sin\omega t\cdot\sin\varepsilon t - \cos\omega t \\ &\overset{kleines\ \varepsilon}{=} \cos\omega t\cdot 1 - \sin(\omega t)\cdot\varepsilon t - \cos\omega t \end{aligned}$$

und

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[\frac{f}{m(2\omega+\varepsilon)(-\varepsilon)}\cos(\omega+\varepsilon)t - \cos\omega t] = \frac{f}{2m\omega\varepsilon}\varepsilon t\cdot\sin\omega t = \boxed{\frac{f}{2m\omega}t\cdot\sin\omega t}$$

Die allgemeine Lösung lautet dann

$$x(t) = A\cdot\cos(\omega t+\varphi) + \frac{f}{2m\omega}t\cdot\sin\omega t$$

Im Resonanzfall, steigt die Schwingungsamplitude linear mit der Zeit (solange sie nicht so gross wird, dass die gesamte dargelegte Theorie nicht mehr anwendbar ist!).

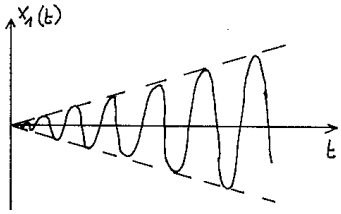


Abbildung 4.1: Verlauf der Schwingung im Resonanzfall

Die Erscheinung der Resonanz hat viele Anwendungen in der Physik und überhaupt in den Naturwissenschaften. Auf einige davon werden wir näher eingehen. Die Resonanz kann aber auch sehr gefährlich werden, z.B. für Maschinenteile wie Turbinenwellen, wenn die Eigenfrequenz der Welle gleich ihrer Umlauffrequenz wird. Beim Anfahren von Gasturbinen, bei denen die Betriebsfrequenz oberhalb der Eigenfrequenz liegt, muss deshalb möglichst schnell über die Resonanzstelle hinweg gefahren werden.

Neben der Amplitude ist auch die von der äusseren Kraft zugeführte Energie (oder Arbeit) eine Grösse, die oft den Resonanzprozess charakterisiert. Die Energie eines Systems, das erzwungene Schwingungen ausführt, bleibt nämlich nicht erhalten. Diese Tatsache lässt sich direkt aus der in der Lagrange-Funktion vorkommenden expliziten Zeitabhängigkeit herleiten. Nach unseren Definitionen ist die in einer Periode $\tau = 2\pi/\omega$ zugeführten Energie

$$A^{\swarrow} = \int_{x(0)}^{x(t)} F^{\swarrow}\, dx = \int_0^{\tau} F^{\swarrow} \frac{dx}{dt} dt$$

Wir unterscheiden zwischen zwei Fällen: $\gamma \neq \omega$ und $\gamma = \omega$. Im ersten Fall ist die zugefügte Energie (oder, anders ausgedrückt, die vom System absorbierte Energie) null:

$$-\int_0^{\tau} f \cdot cos\gamma t \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)} \gamma \cdot sin\gamma t \propto \int_0^{\tau} cos\gamma t \cdot sin\gamma t =$$
$$= \overline{cos\gamma t \cdot sin\gamma t}^t = 0\,!$$

Nur im Resonanzfall ist das System imstande, Energie zu absorbieren, nämlich

$$\int_0^{\tau} \frac{f^2}{2m\omega} \omega \cdot cos\omega t \cdot t \cdot cos\omega t\, dt = \frac{f^2}{2m} \int_0^{\tau} t \cdot cos^2 \omega t\, dt =$$
$$= \frac{f^2}{2m}(\frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau^2}{4}) = \frac{f^2}{8m}\tau^2$$

Diese Möglichkeit, nur bei der Resonanz einem System Energie zuzuführen, ist die Grundlage für die Absorption von Licht durch Materie, und findet zum Beispiel

in der Spektroskopie eine wichtige Anwendung (die τ^2-Abhängigkeit der absorbierten Energie wird in der Tat nicht beobachtet: Man beobachtet eher eine τ-Abhängigkeit, die dazu führt, dass die absorbierte Energie pro Zeiteinheit konstant ist. Wir werden sehen, wie die Einführung der Dämpfung zur nötigen Korrektur führt.)

Bis jetzt haben wir angenommen, dass die Bewegung der Masse im leeren Raum stattfindet, oder dass der Einfluss des Mediums auf die Bewegung vernachlässigbar ist. In Wirklichkeit setzt das Medium der Bewegung des Körpers einen Widerstand entgegen, der sie zu verlangsamen sucht. Die Energie des sich bewegenden Körpers geht hierbei letzen Endes in Wärme (oder Strahlung) über – man sagt, sie dissipiert. Der Bewegungsprozess ist unter diesen Bedingungen schon kein rein mechanischer Vorgang mehr. Beispielweise kann man im Allgemeinen nicht mehr behaupten, dass die Beschleunigung eines bewegten Körpers nur von seinen Koordinaten und von der Geschwindigkeit zu einem gegebenen Zeitpunkt abhängt; d.h, BG im Sinne, wie sie in der Mechanik vorkommen, existieren nicht. Die Bewegung hängt auch von anderen Parametern ab, zum Beispiel von der Temperatur sowohl des Körpers als auch der des Mediums. Oft *simuliert* man solche dissipativen Vorgänge, indem man eine *Reibungskraft* in die BG einführt. Eine solche Reibungskraft nimmt für den hier betrachteten Fall der eindimensionalen Schwingung die Form $f_D = -D \cdot \dot{x}$, $D > 0$ an. Das Minuszeichen bedeutet, dass die Kraft der Bewegung entgegenwirkt. Wenn wir diese Kraft auf der rechten Seite der BG hinzufügen, erhalten wir (zuerst sei $F = 0$) $m\ddot{x} = -kx - D\dot{x}$. Wir teilen durch m und führen die Bezeichnungen $\frac{k}{m} = \omega^2$, $\frac{D}{m} = 2\lambda$ ein. Dabei ist ω die Frequenz der freien Schwingungen des Systems ohne Reibung. Die Grösse 2λ heisst Dämpfungskonstante. Auf diese Weise erhalten wir die Gleichung

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

Nach den allgemeinen Regeln für die Lösung linearer DG mit konstanten Koeffizienten setzen wir den Ansatz $x = e^{r \cdot t}$ und finden die charakteristische Gleichung $r^2 + 2\lambda r + \omega^2 = 0$ mit den Lösungen $r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$. Die allgemeine Lösung der Gleichung ist

$$x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

Hier müssen zwei Fälle unterschieden werden: Für $\lambda < \omega$ erhalten wir zwei komplex konjugierte Werte für $r_{1,2}$:

$$r_{1,2} = -\lambda \pm i\sqrt{|\lambda^2 - \omega^2|}$$

Die allgemeine Lösung der DG ist

$$x(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega_D t + \varphi)$$

$\omega_D \doteq \sqrt{|\lambda^2 - \omega^2|}$. Die durch diese Formel dargestellte Bewegung ist eine sog. *gedämpfte Schwingung.* Man kann sie als harmonische Schwingung mit exponentiell abnehmender Amplitude ansehen. Die Schwingungsfrequenz ist kleiner als die Frequenz der freien Schwingung ohne Reibung.

Wir nehmen jetzt an, dass $\lambda > \omega$ ist. Dann sind beide Werte von r reell und negativ. Die allgemeine Lösung lautet hier

$$x = c_1 e^{-(\lambda-\sqrt{\lambda^2-\omega^2})t} + c_2 e^{-(\lambda+\sqrt{\lambda^2-\omega^2})t}$$

Die Bewegung besteht aus einer asymptotischen (bei $t \to \infty$) Annäherung an die Gleichgewichtslage ohne Schwingung. Diese Bewegung heisst aperiodisch. Im Automobilbau ist das die Aufgabe der Stossdämpfer, die durch starke Bodenunebenheiten entstehenden unangenehmen und auch gefährlichen Federschwingungen der Karrosserie sofern als möglich aperiodisch zu dämpfen.

Dissipative Vorgänge spielen natürlich auch bei erzwungenen Schwingungen eine grosse Rolle. Sie modifizieren den Verlauf des Resonanzvorganges, indem sie auch entfernt von der Resonanz zur Absorption der Energie führen können. Dabei bremsen sie das Wachstum der Amplitude im Resonanzfall zu einem endlichen, stationären Wert. Die DG lautet

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 x = \frac{f}{m}\cos\gamma t$$

Die allgemeine Lösung ist dann (ohne Herleitung)

$$x(t) = A \cdot e^{-\lambda t}\cos(\omega_D t + \varphi) + b \cdot \cos(\gamma t + \delta)$$

mit $b = \frac{f}{m\sqrt{(\omega^2-\gamma^2)+4\lambda^2\gamma^2}}$ und $\tan\delta = \frac{2\lambda\gamma}{\gamma^2-\omega^2}$. Der erste Summand nimmt mit der Zeit exponentiell ab, sodass nach genügend langer Zeit nur noch der "erzwungene" Term $b \cdot \cos(\gamma t + \delta)$ übrigbleibt. Die Phase wechselt nicht sprunghaft von 0 zu $-\pi$

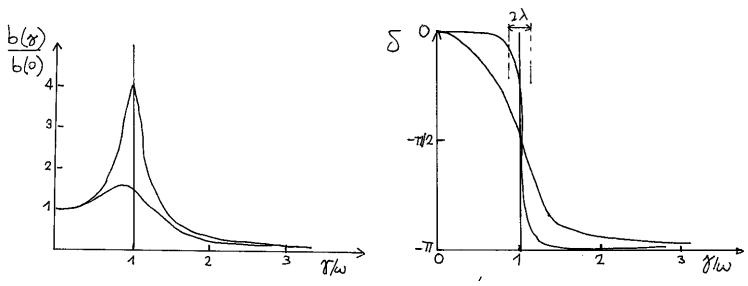


Abbildung 4.2: Die Phase δ und die Amplitude b als Funktion von γ für zwei verschiedene Parameter λ

wie beim Fall $\lambda = 0$. Der Wechsel findet in einem engen Frequenzbereich der Breite 2λ in der Umgebung von ω statt. Am besten schätzen wir die Wirkung der dissipativen Kraft, indem wir die absorbierte Energie im Fall $\lambda \neq 0$ betrachten. Die in einer Periode absorbierte Energie ist

$$A_{\lambda\neq 0} = -f \cdot b \cdot \gamma \int_0^\tau \cos\gamma t \cdot (\sin\gamma t \cdot \cos\delta + \cos\gamma t \cdot \sin\delta) =$$

$$= -f \cdot b \cdot \gamma \int_0^\tau \cos^2\gamma t \cdot \sin\delta = -f \cdot b \cdot \gamma \underbrace{\overline{\cos^2\gamma t}^t}_{\frac{1}{2}\tau} \sin\delta$$

$$\Leftrightarrow A^{\swarrow}_{\lambda\neq 0} = \frac{f}{2} \cdot b \cdot \gamma \cdot \tau |\sin\delta| > 0\,!$$

Die entsprechende absorbierte Leistung ist

$$\frac{A^{\swarrow}}{\tau} = \frac{f}{2}\gamma b |\sin\delta|$$

Im eingeschwungenen Zustand bleibt die Energie eines Systems, das erzwunge-

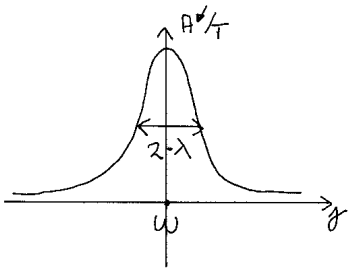
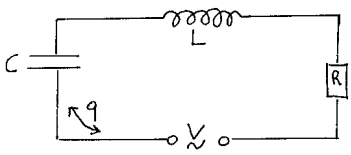


Abbildung 4.3: Absorbierte Leistung

ne Schwingungen ausführt, unverändert. Das System absorbiert allerdings ununterbrochen Energie (aus der Quelle der äusseren Kraft), die infolge der Reibung dissipiert. Bei der Resonanzfrequenz ist die aufgenommene Leistung maximal, die scharfe Resonanzlinie bekommt eine endliche Breite. In der Technik führt man oft zur Charakterisierung der Schärfe einer Resonanzlinie den sog. *Q-Faktor* als $Q = Resonanzfrequenz/Breite\ der\ Resonanzkurve$ ein. Da Resonanzerscheinungen eine sehr wichtige Rolle in der Natur spielen und fast auf allen Gebieten der Physik vorkommen, wollen wir einige davon besprechen.

Beispiel 1: Elektrische Resonanzkreise Ein einfacher elektrischer Resonanzkreis (oder Schwingungskreis) besteht aus einer Serienschaltung einer Kapazität C, einer Induktivität L und eines Widerstandes R, hier abgebildet. Die veränderliche Grösse im elektrischen Schwingkreis ist die



transportierte Ladung q in Analogie zu x bei der mechanischen harmonischen Schwingung. Die Schwingungsgleichung für obigen elektrischen Kreis lautet

$$\ddot{q} + \frac{R}{L} \cdot \dot{q} \cdot \frac{1}{C \cdot L} \cdot q - \frac{1}{L} \cdot V_0 \cdot \cos\omega t = 0$$

Die Halbwertsbreite der Resonanzkurve beträgt in diesem Fall R/L. Vergleichen wir die beiden Differentialgleichungen für x und q, so können wir eine rein formale Beziehung entsprechender Grössen finden, die in dieser Tabelle aufgezählt sind.

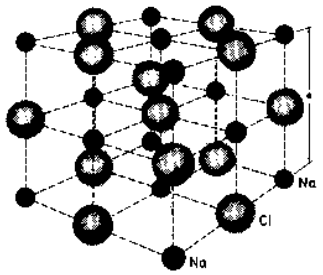
Charakteristika	Mech. System	Elektr. System
Unabhängige Veränderliche	t	t
Abhängige Variable	x	q
Trägheit	m	L
Dämpfung	2λ	$\frac{R}{L}$
Resonanzfrequenz (Eigenfreq.)	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}$
Schwingungsdauer (Periode)	$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	$\tau = 2\pi\sqrt{L \cdot C}$
Q-Faktor	$\frac{\omega_0}{2\lambda}$	$\frac{\omega_0 \cdot L}{R}$

Beispiel 2: Spektroskopien Man kann die Wechselwirkung zwischen einem System mit atomarer Ausdehnung und elektromagnetischer Strahlung durch eine klassische erzwungene Schwingung simulieren, indem man die von aussen angelegte Störkraft mit dem elektrischen Feld der Strahlung identifiziert. Systeme mit atomarer Ausdehnung sind durch **diskrete** Energiewerte charakterisiert, d.h. dürfen nur bestimmte Energiewerte annehmen. Die "Eigenfrequenz" ω stellt eine charakteristische Frequenz des Systems dar, und zwar ist sie ein Mass für den Abstand zwischen zwei Eenrgieniveaus, $\omega \doteq (E_1 - E_0)/\hbar$, wobei $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054 \cdot 10^{-34} kg \cdot m^2/s$ das **Plank'sche Wirkungsquantum** ist. Dieses Modell führt zum Phänomen, dass nur bei der Resonanzfrequenz das System vom elektromagnetischen Energiefeld absorbieren kann. Diese Absorption erfolgt durch den Übergang des Systems vom niedrigen Energieniveau E_0 zum angeregten Zustand E_1. Durch diese Resonanzerscheinung entsteht die Möglichkeit, die Energieniveaus eines Systems zu bestimmen: das ist die Grundlage der Spektroskopie, da es ermöglicht, verschiedene Systeme anhand deren Absorpsionsspektren zu erkennen.

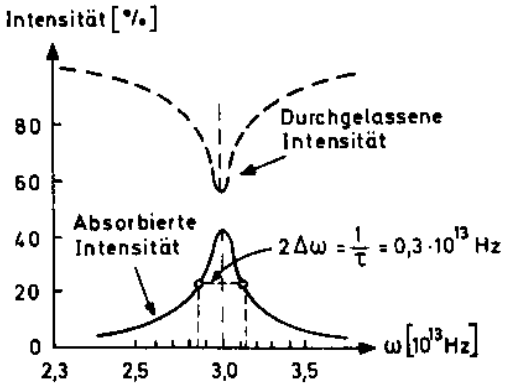
Mögliche angeregte Zustände eines Moleküls sind Schwingungen, für welche ω mit der klassischen Schwingungsfrequenz übereinstimmt. Schwingungen führen zur Absorption im Infrarotbereich: man sprich von Infrarotspektroskopie. Ein typisches Absorptionsspektrum verursacht durch Schwingungen, ist in der Figur aufgezeichnet. Die transmittierte Lichtintensität als Funktion der Wellenlänge des einfallendes Lichts zeigt ein deutliches Transmissionsminimum, entsprechend einer Energieaufnahme der Moleküle, also einer Anregung von Schwingungen. Solche Minima sind charakteristisch für die betreffende Substanz, und der Chemiker kann daraus die Natur und Art der zu untersuchenden Probe bestimmen.

Absorption im Ultravioletten deutet auf elektronische Anregungen hin, wie der übergang zwischen zwei Energieniveaus im Wasserstoffatom. Die "Natriumflamme" ist ein typisches Beispiel einer elektronischen Anregung. Das Na-Atom besitzt in seiner elektonischen Struktur zwei benachbarte Niveaus, deren Abstand gelbem Licht entspricht. Auf ein Drahtnetz, das in der Flamme eines Bunsenbrenners steht, wird Kochsalz gestreut, und die Flamme leuchtet gelb, entsprechend der Wellenlänge des gelben Na-Lichtes 5890 $\mathring{A}$. Durch das Erhitzen werden einige Atome in einen angeregten Zustand versetzt. Die angeregten Atome bleiben jedoch nur sehr kurze Zeit $\tau \approx 10^{-8}$sec in diesem angeregten Zustand und fallen wieder auf ihr Ausgangsniveau zurück. Dabei emittieren sie Licht mit der charakteristischen Na-Wellenlänge. Beleuchten wir die Flamme mit einer Natrium-Spektrallampe, die genau diese Wellenlänge emittiert, so beobachten wir an der bestrahlten Stelle der Flamme auf einem dahinter aufgestellten Schirm schwarze Zonen. Durch das Einstrahlen der Resonanzfrequenz ω werden die Atome energetisch in den angeregten Zustand versetzt. Ein Teil des einfallenden Lichts wird für diesen Prozess benutzt, und verschwindet. Das durch spontane Emission reemittierte Licht geht in jeden Raumwinkel und fehlt daher zu einem hohen Prozentsatz in der Durchstrahlrichtung: ein Schatten ensteht. Aufgrund der endlichen Lebensdauer, besitzen die Niveaus eine gewisse Breite $\Delta E = \hbar/\tau$: auch benachbarte Frequenzen können am Resonanzprozess teilnehmen.

In der Tabelle sind die charakteristischen Absorptionsbereiche, mit den entsprechenden Anregungen, zusammengefasst.



Kubische Struktur eines Kochsalz-Kristalls: bei Einstrahlung einer elektromagnetischen Welle werden die positiven Na^+-Ionen und negativen Cl^--Ionen durch das elektrische Feld gegeneinander ausgelenkt und schwingen damit im Takt des elektrischen Feldes. (Bildquelle: C. Kittel: Einführung in die Festkörperphysik, R. Oldenbourg Verlag, 1973)



Absorption und Transmission von infrarotem Licht variabler Frequenz in einem dünnen NaCl-Plättchen: die geringe Schärfe des Resonanzmaximums ist auf die starke Kopplung von Schwingungen im Kristall zurückzuführen.

Spektralgebiet	Art der Anregung
Ultra-violett (UV)	Schwingungen der Valenzelektronen
Infrarot (IR)	Molekülvibrationen
Mikrowellen	Molekülrotationen

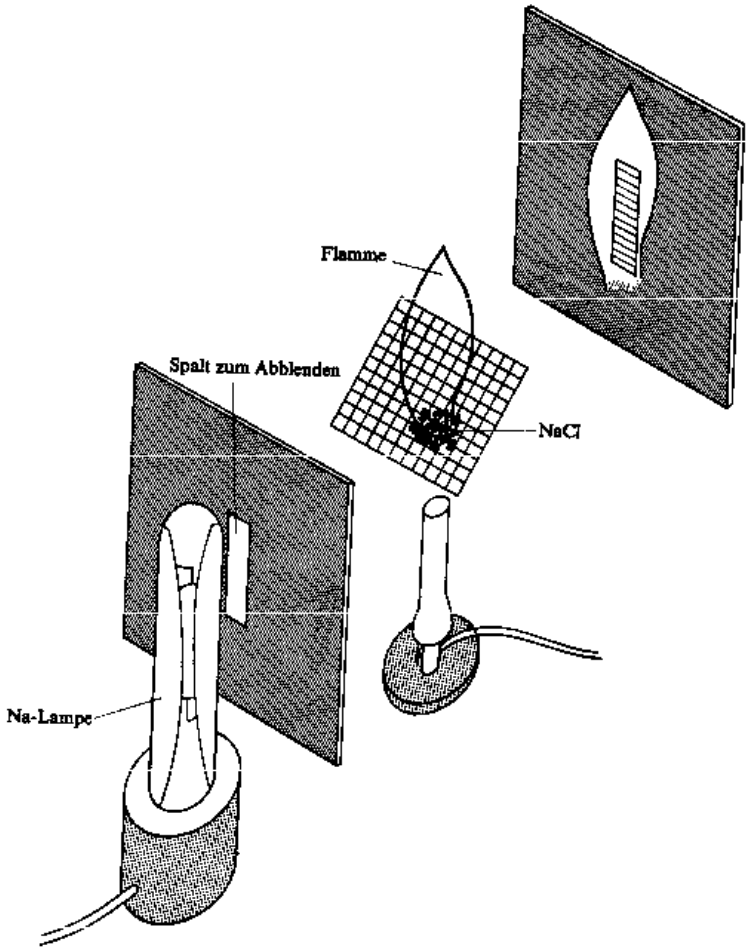
Die Absorptionsmaxima im UV einiger typischer organischer Substanzen mit Mehrfachbindungen sind im Folgenden aufgezählt.

Verbindung	Wellenlänge des Absorptionsmaximums
$H_2C = CH_2$	1625Å
$HC \equiv CH$	1775Å
$HC \equiv N$	1750Å
$(CH_3)_2C = O$	1870Å

Resonanzphänomene beobachtet man auch in der Kernspektroskopie. Dabei tritt eine besondere Schwierigkeit auf: bei der Emission eines γ-Quants erfährt der Kern aus Impulserhaltungsgründen einen Rückstoss. Einen Rückstoss erfahren auch Atome, dieser ist allerdings vernachlässigbar klein. Durch diesen Rückstoss besitzt das emittierte Quant eine um die Rückstossenergie verringerte Energie. Da der Impuls eines Quants $\hbar\omega$: $p = \hbar\omega/c$ ist, muss der gleiche Impuls vom Kern als Rückstoss aufgenommen werden. Die Rückstossenergie eines Kerns der Masse M beträgt deshalb:

$$E_R = \frac{p^2}{2M} = \frac{\hbar^2\omega^2}{2Mc^2} = \frac{E_\gamma^2}{2Mc^2}$$

Betrachten wir zwei benachbarte Kernzustände, deren Energiedifferenz E gegeben sei. Bei der Emission eines γ-Quants geht der Kern vom Zustand II in den Zustand I über. Die Energie des γ-Quants ist gleich der Energiedifferenz der beiden Zustände E, vermindert um die Rückstossenergie



E_R, also $\hbar\omega = E - E_R$. Da die Kernniveaus ausserordentlich scharf sind, viel schärfer als atomare Niveaus, reicht diese γ-Energie $\hbar\omega$ nicht mehr aus, um einen anderen Kern vom Niveau I auf das Niveau II anzuregen; oder mit anderen Worten: man kann einen Kern nicht als Photonenquelle für die Spektroskopie anderer ähnlicher Kerne benutzen.
Dieses Bild ist nicht ganz korrekt: der Münchner Physiker Rudolf Mössbauer fand einen beträchtlichen Teil an resonanter Absorption bei Kernen (für diese Entdeckung erhielt er 1961 den Nobelpreis). Dieser Effekt wurde von Mössbauer folgendermassen erklärt. Betrachten wir die Gleichung für E_R, so erkennen wir die Abhängigkeit der Rückstossenergie E_R von der Masse des Kerns M, der den Rückstoss aufnimmt. Sind die γ-emittierenden Kerne sowie die absorbierenden Kerne in ein Kristallgitter eingebaut, so wird der Rückstoss bei Emission nicht von einem einzelnen Kern der Masse M, sondern mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit von dem umgebenden Kristallgitter als ganzes aufgenommen. In der Gleichung für E_R müssen wir daher in bestimmten Fällen die Masse M durch eine sehr grosse Masse ersetzen, dabei wird die Rückstossenergie E_R beliebig klein, d.h. die Energie des γ-Quants wird wieder gleich der Differenz der Kenergiezustände. Diese γ-Strahlung kann von einem anderen Kern resonant absorbiert werden. Eines der Isotope, das heutzutage am häufigsten für Mössbauereffektmessungen verwendet wird, ist Fe^{57} mit der 14,4 keV γ-Linie. Die Linienbreite ist von der Grössenordnung $5 \cdot 10^{-9}$ eV. Damit wird der Q-Faktor von der Grössenordnung 10^{12}. Darin

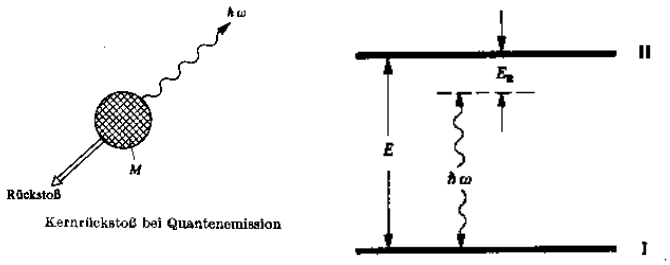
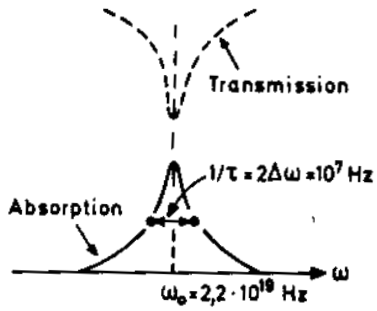


Abbildung 4.4: Energieschema beim Mössbauereffekt (rechts)

Absorption von γ-Strahlen in einer dünnen ^{57}Fe-Folie (Mößbauer-Effekt): die Schärfe des Resonanzmaximums ist außerordentlich groß. Schon kleine Bewegungen von einigen cm/s der γ-Quelle gegenüber dem Absorber genügen, um die Frequenz der γ-Strahlen durch Doppler-Effekt so zu verstimmen, daß keine Absorption mehr auftritt.

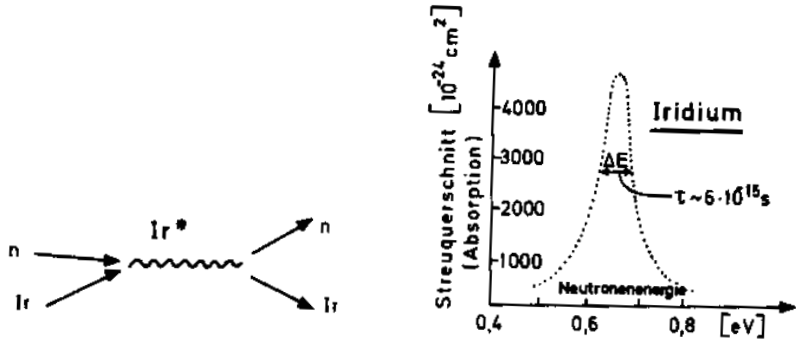


liegt die grosse Bedeutung des Mössbauereffektes. Man hat ein äusserst empfindliches Werkzeug zur Hand, um z.B. relativistische Effekte, Magnetfelder, Verschiebungen im Kristallgitter usw. zu messen.

Mössbauer selbst hat diesen Effekt der rückstossfreien Kern-Resonanzabsorption zuerst an Iridium 191 gefunden (Z. f. Physik **151**, 124, 1958). Es sind heutzutage mehr als 80 Isotope bekannt, die für den Mössbauereffekt geeignet sind. Stichwortartig seien in folgender Tabelle einige Beispiele von Anwendungen des Mössbauereffektes aufgezählt.

Die wohl grösste Bedeutung hat der Mössbauereffekt für die Aufklärung der Strukturen fester Körper.

Gebiet	Anwendung
Relativität	Frequenzverschiebung eines Lichtquants im Gravitationsfeld
Kernphysik	Bestimmung magnetischer Momente von angeregten Zuständen
Kernphysik	Quadrupoleffekte
Kernphysik	Bestimmung von Kernradien
Festkörperphysik	Elektrischer Feldgradient am Kernort
Festkörperphysik	Messung von inneren Magnetfeldern in Kristallen
Festkörperphysik	Magnetische Kristallstruktur
Festkörperphysik	Strahlungsschäden
Chemie	Isomerieveschiebung
Chemie	Hüllenordnungen nach Kernprozessen
Chemie	Strukturaufklärung komplizierter Moleküle



Resonanzabsorption bei Beschuß von Ir-Kernen mit Neutronen: das Absorptionsmaximum für eine Neutronenenergie von etwa 0,65 eV deutet daraufhin, daß ein Kombinationsteilchen Ir* gebildet worden ist. Aus der Resonanzschärfe kann man die Lebensdauer des angeregten Ir*-Kerns ablesen.

Wir schliessen mit der Illustration von Resonanzen in der Teilchenphysik. Schiesst man z.B. Neutronen auf Iridiumkerne oder π-Mesonen auf Protonen, so können für sehr kurze Zeiten sog. Resonanzen entstehen, kurzlebige Kombinationsteilchen, die kurz nach ihrer Bildung zerfallen. Das Auftreten einer Resonanz äussert sich in der Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeit σ für eine bestimmte Reaktion von der Energie:

Aus der Breite der Resonanzabsorption, welche gleich $\hbar/\tau$ ist, liest man die Lebensdauer τ des Kombinationsteilchens ab. Das zeigt, dass Resonanzen auch in der Kern-und Teilchenphysik von Bedeutung sind: neue Teilchen zeigen sich oft nur als Resonanz in einem Streuexperiment.

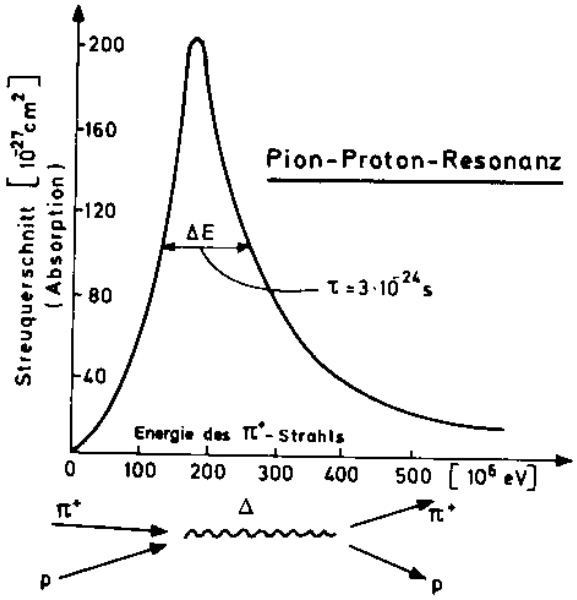
4.3 Die lineare schwingende Kette

Mit unserem mechanischen Modell konnten wir die Schwingungen von einfachen zweiatomigen Molekülen erfassen, die entlang einer Koordinate stattfinden. In diesem Modell wurden die Bestandteile der Moleküle durch eine Feder"gekoppelt, mit der Federkonstante $k = U''(x_0)$. Wir wollen jetzt mit dem gleichen Federmodell versuchen, Kristallschwingungen zu beschreiben. Dazu betrachten wir entlang der x-Koordinate eine lineare Kette von N Atomen der Masse m, die paarweise mit der Federkonstante k gekoppelt sind. Wir bezeichnen als $u(n) \doteq x_n - x_{n0}$ die Abweichung der $n-ten$ Masse aus der Ruhelage $x_{n0} \doteq n \cdot a$, wobei a die Gitterkonstante ist. Die Lagrange Funktion $L(u(1), ..., u(n))$ dieses Systems lautet

$$\sum_n 1/2m\dot{u}(n)^2 - \sum_n [1/2k(u(n) - u(n-1))^2 + 1/2(u(n) - u(n+1))^2]$$

Die BG für die $n-te$ Masse lautet

$$m\ddot{u}(n) = k[u(n-1) + u(n+1)] - 2ku(n)$$



Pion-Proton-Resonanz: Zur Bildung der Δ-Resonanz im Proton durch π^+-Mesonen-Absorption. Die Resonanzbreite entspricht einer Lebensdauer von $3 \cdot 10^{-24}$ s.

Da die Auslenkungen $u(n \pm 1)$ in der BG für das $n - te$ Atom auftreten, bilden alle BG ein System von N gekoppelten DG. Die Lösung hängt davon ab, welche Randbedingungen der Kette auferlegt werden. Man kann z.B. die Randatome festhalten oder frei geben. Wenn n eine kleine Zahl ist, hängen die Lösungen stark von diesen Randbedingungen ab, wie man am Bsp. $n = 3$ sofort klar ersieht. Bei einer makroskopischen Anzahl n muss der Einfluss der Randbedingungen auf die Schwingungsfrequenzen klein sein. Physikalisch kann man sich vorstellen, dass die Kette zu einem Kreis gebogen wird, wobei am n Atom noch eine Feder angebracht ist, die es mit dem ersten Atom verbindet. Damit hat man den Rand eliminiert. Mathematisch bedeutet diese Biegung der Kette zu einem Kreis die Annahme *periodischer* (in der Fachliteratur auch Born-von Karman) Randbedingungen: $u(n) = u(n + N)$. Die Lösungen des DG Systems mit diesen Randbedingungen sind solche, die der Realität näher kommen sollten, weil sie Oberflächeneffekte auf die Festkörpereigenschaften eliminieren. Zur Lösung des DG Systems macht man den Ansatz $u(n) = Ae^{i(qna-\omega t)}$, wobei der Faktor e^{iqna} die n Abhängigkeit der Auslenkung berücksichtigt. Durch Einsetzen des Ansatzes finden wir die charakteristische Gleichung

$$-m\omega^2 = k[e^{-iqa} + e^{iqa} - 2] = 2k[\cos(qa) - 1]$$

deren Lösung die möglichen Eigenfrequenzen der schwingenden Kette ergibt. $\omega(q) = 2\sqrt{k/m} \cdot sin(qa/2)$. Die Randbedingung bestimmt die möglichen Werte vom

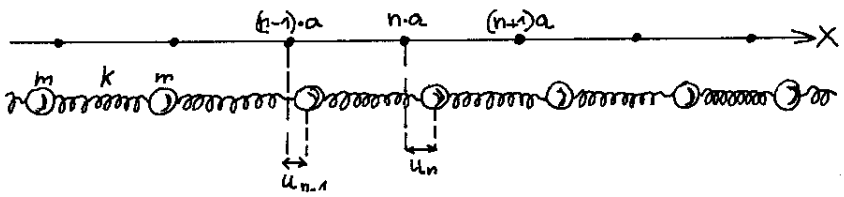


Abbildung 4.5:

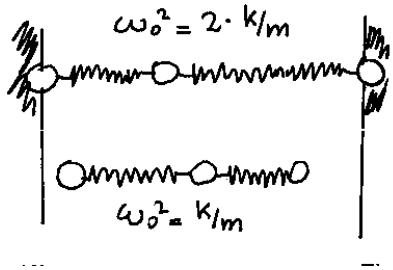


Abbildung 4.6:

Parameter$q$: $e^{iq(n+N)a} = e^{iqna}$, d.h. $e^{iqNa} = 1$ oder $qNa = p{\cdot}2\pi, p = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ Die möglichen Schwingungszustände sind durch dicht nebeneinanderliegende q-Werte klassifiziert, jeder q Wert trägt eine bestimmte Eigenfrequenz. Die gesuchten N linear unabhängigen Lösungen können durch die q Werte im Intervall $-\pi/a, \pi/a$ dargestellt werden. Die Kopplung bewirkt, dass sich die Frequenz $\sqrt{k/m}$ des unge-

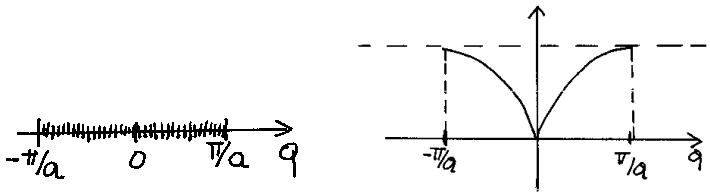
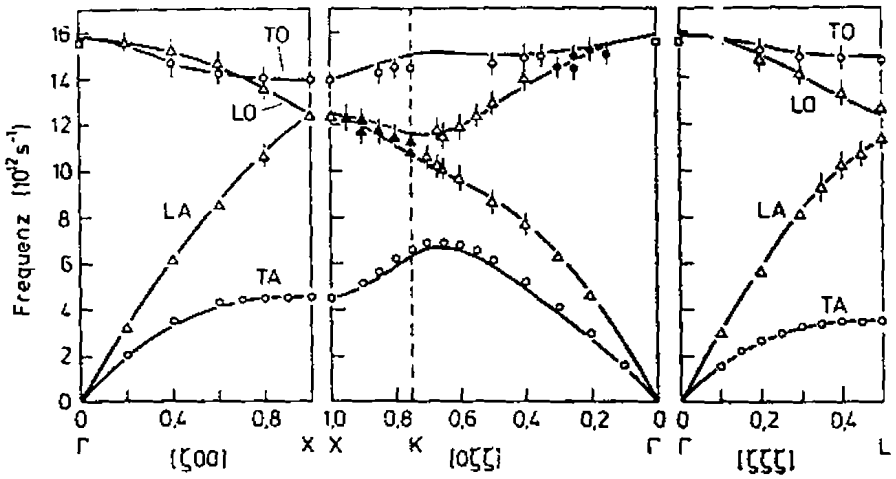


Abbildung 4.7:

koppelten Oszillators zu einem Frequenzband verbreitet. Jeder Frequenz kann ein q Wert zugeordnet werden. Die q Abhängigkeit von w nennt man **Dispersionsrelation**. Die Eigenmoden, die zu den Eigenfrequenzen gehören, nennt man **Phononen**. Besteht die Kette aus Atomen mit unterschiedlichen alternierenden Massen, erwartet man mindestens zwei-Phononenbänder, die evtl. durch eine Lücke getrennt sind. Verbindungen wie $NaCl$ haben zum Beispiel zwei Phononenbänder:

Das untere Band nennt man *akustische* Phononen, das obere sind die *optischen* Phononen. Einen optischen und akustischen Zweig bekommt man auch, wenn die Kraftkonstanten alternierend sind. Diese Resultate lassen sich auf dreidimensionale Kristalle erweitern. In drei Dimensionen, wird q zu einem Vektor, der innerhalb eines Polyeders verteilt ist. Die Phononendispersionsrelationen können richtungsabhängig werden und einen komplizierteren Verlauf zeigen.



(a) Phonon Dispersionskurven von Si. Die Kreise und Dreiecke sind Meßpunkte, die ausgezogenen Linien das Ergebnis einer Modellrechnung nach *Dolling* u. *Cowley* [4.3]. Anstelle des Wellenzahlvektors q benutzt man häufig eine Auftragung in den Koordinaten des reduzierten Wellenzahlvektors $\zeta = q/(2\pi/a)$. Die gezeichneten Längen der Abszissen entsprechen den richtigen Entfernungen der Punkte in der Brillouin-Zone.

Die Zweige der Phonon Dispersionskurven tragen die Bezeichnungen TA (transversal akustisch), LA (longitudinal akustisch), TO (transversal optisch) und LO (longitudinal optisch). Entlang der [100] und der [111] Richtung sind die transversalen Zweige entartet.

Abbildung 4.8:

4.4 Die Wellengleichung

Wir betrachten Phononen mit $q \approx 0$. Für solche Phononen ist die charakteristische Länge $2\pi/q$ über welche $u(n)$ variiert viel grösser als die Gitterkonstante. Wir können daher n als kontinuierliche Variable x bezeichnen und die BG für $u(x,t)$ folgendermassen aufstellen:

$$\begin{aligned} m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= k[u(n-1,t) + u(n+1,t)] - 2ku(n,t) \\ &\approx k[u(n,t) - au'(n) + \frac{a^2}{2}u''(n) + u(n,t) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad au'(n) + \frac{a^2}{2}u''(n)] - 2ku(n,t) \\
&= \quad ka^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \quad \frac{ka^2}{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}
\end{aligned}
$$

Die Materialkonstante $\frac{ka^2}{m}$ wird als c^2 bezeichnet. Ihre Bedeutung wird bald klar. Diese Gleichung ist die eindimensionale **Wellengleichung** für die Auslenkung u an der Stelle x zur Zeit t. Die linear unabhängigen Eigenmoden $u(x,t) = Acos(qx - \omega t)$ und $Asin(qx - \omega t)$ sind spezielle Lösungen der Wellengleichung und sind ein spezielles Beispiel von **Wellen**: sie heissen harmonische Wellen. Die allgemeinste Form der linear unabhängigen Lösungen der eindimensionalen WG ist $u(x,t) = f(x \pm ct)$ (d' Alembertsche Lösungen) und die allgemeinste Lösung ist die lineare Superposition der beiden Grundlösungen. Man stelle sich eine lokale Störung $f(x, t = 0)$ vor, die zum Beispiel ein Maximum bei x_0 besitzt. Eine solche Störung kann zum Beispiel eine Verschiebung der Teilchen eines Mediums aus ihrer Ruhelage (Phononen, Seilwellen, Wasseroberflächenwellen) oder einer Dichteschwankung bei elastischen Wellen, Schallwellen und Erdbebenwellen bedeuten. Es kann aber ein von elekromagnetischen Feldern (Licht) bedeuten, das sich durch ein plötzliches Ein- und Ausschalten eines Stromes gebildet hat. Wenn diese

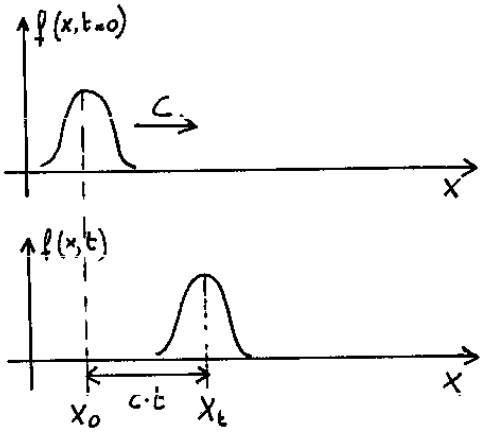


Abbildung 4.9:

Störung nach der Wellengleichung evolviert, dann ist die funktionelle Abhängigkeit zur Zeit t $f(x-ct)$, siehe Figur, d.h. die Störung sieht genau gleich aus wie zur Zeit $t = 0$ aber ist am Ort $x_t = ct$ zentriert: die Wellengleichung hat die Störung fortgepflanzt, und zwar mit Beibehaltung der Form. Die Materialkonstante c ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Die Lösung $f(x + ct)$ beschreibt eine Welle, die sich nach rechts entlang der x-Achse fortpflanzt. Die Materialkonstanten, die c

bestimmen, hängen von der Wellenart ab. Bei Phononen ist die zweite Ableitung der potentiellen Energie massgebend (zusammen mit Masse und Gitterkonstante). Schreiben wir $\frac{ka^2}{m}$ als $\frac{ka}{m/a^3} \doteq D/\rho$, mit ($\rho$: Dichte) und D: Zugkraft) dann bekommen wir die Geschwindigkeit von Seilwellen. Bei Schallwellen ist $c = \sqrt{E/\rho}$, E: Elastizitätsmodul. Für Lichtwellen ist c die Lichtgeschwindigkeit.

Beispiele von Wellen

Beispiel 1. Harmonische Welle.
Die harmonische Welle $f(x,t) = A \cdot cos(qx - \omega t)$ erfüllt die WG, wenn $\omega = cq$. Diese ist die Dispersionsrelation, die wir für langwellige Phononen aus der exakten Lösung erwartet haben. Eine instantane Aufnahme einer harmonischen Welle erlaubt, die verschiedenen Parameter zu veranschaulichen: $\lambda \doteq 2\pi/q$ ist der Ab-

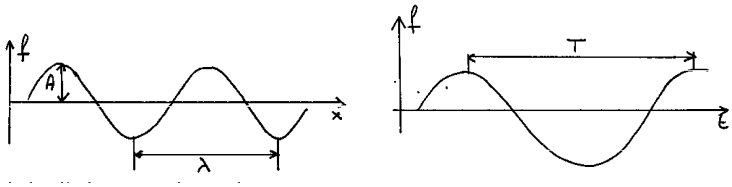


Abbildung 4.10: Harmonische Welle zu einer festen Zeit (links) und an einem bestimmten Ort (rechts)

stand zweier Wellentäler (oder analoge Punkte der Welle) und heisst Wellenlänge. q ist die Wellenzahl und gibt gerade die Zahl der Wellentäler pro Längeneinheit an. Man betrachte jetzt den zeitlichen Ablauf an einem festen Ort, Nach der Zeit T wiederholt sich in x dieselbe Phase der Welle, z.B. ein Wellental: T ist die Periode der Welle. $\omega = 2\pi/T$ ist dann die Frequenz, mit welcher sich dieselbe Phase pro Zeiteinheit wiederholt. Es gilt: $\lambda = cT$.

Beispiel 2: Stehende Welle.
Eine von links einfallende harmonische Seilwelle trifft auf eine feste Halterung (aber es kann sich auch um eine ebene Lichtwelle handeln, die an einem Spiegel reflektiert ist) bei x = 0. Die Gesamtwelle setzt sich aus der einfallenden und der reflektierten Welle zusammen, wobei die Randbedingung $u(x = 0, t) = 0 \ \forall t$ erfüllt werden muss. Die gesuchte Lösung ist

$$\begin{aligned} u(x,t) &= A[\cos(\omega t - qx) - \cos(\omega t + qx)] \\ &= 2A \sin qx \sin \omega t \end{aligned}$$

Wie die Figur zeigt, ist das keine normale laufende Welle mehr: Es gibt nämlich Schwingungsknoten, an denen die Welle überall verschwindet, und es gibt Schwingungszeiten an denen die Auslenkung immer verschwindet. Da die Schwingungsknoten eine feste Lage im Raum haben, spricht man von einer **stehenden Welle**.

Die Schwingungsknoten sind durch die Gleichung $sinqx_n = 0$ bestimmt, d.h. $|x_n| = n\lambda/2$, $n = 0, 1, 2, 3....$

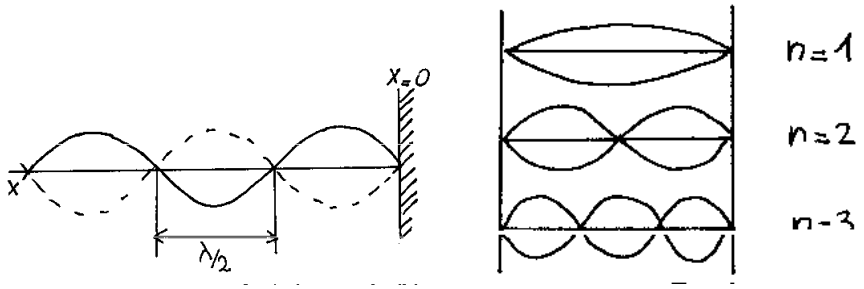
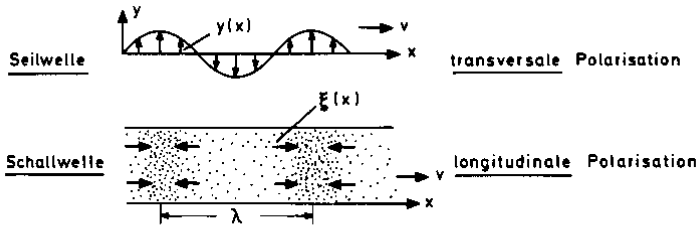


Abbildung 4.11: Stehende Welle (links) und Resonator (rechst)

Beipiel 3: Eigenfrequenzen eines schwingenden Seils.
Hält man das Seil auch noch im Abstand L fest, so tritt die zusätzliche Randbedingung $\sin qL = 0$ auf, die nur für bestimmte q- Zahlen (d.h. für bestimmte Wellenlängen) erfüllbar ist: $\lambda_n = nL/2$, $n = 0, 1, 2, ...$ Dies bedeutet, dass die stehende Welle im Gebiet L nur bestimmte Frequenzen $\omega_n = \frac{n\pi c}{L}$ annehmen darf. Nur solche Wellen, die diese Frequenz haben, können im Gebiet L zu beträchtlichen Amplituden schwingen. Daraus sieht man, dass stehende Wellen fast allen Musikinstrumenten zugrunde liegen: es ist damit möglich, bestimmte Noten zu selektieren. Wenn wir an Licht denken, das zwischen zwei Spiegeln reflektiert wird, so können wir uns genauso vorstellen, dass nur bestimmte Frequenzen und Wellenlängen zwischen den zwei Spiegeln existieren können. In diesem Fall spricht man von einem optischen Resonator. Ein solcher optischer Resonator ist eine fundamentale Komponente für die Erzeugung von Laserlicht, die sehr genau monokromatisch ist.

Beipiel 4: Polarisation einer Welle.
In der Phononenwelle, die wir zur Herleitung der Wellengleichung benutzt ha-



Transversale und longitudinale Polarisation:
bei einer Seilwelle schwingen die Massenelemente senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Bei einer Schallwelle schwingen die Atome parallel zur Ausbreitungsrichtung, was zu Dichteschwankungen führt.

ben, schwingen die Atome entlang der Ausbreitungsrichtung. Eine solche Welle

ist eine *longitudinale* Welle, d.h. sie ist longitudinal polarisiert. Es ist aber auch möglich, dass die Störung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung stattfindet (Seilwelle und transversale Phononen): man spricht daher bei der Seilwelle von einer transversalen Polarisation. Dieselbe Polarisation haben EM Wellen, bei welchen E und B ebenso senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung schwingen. Ein weiteres Beispiel einer longitudinal polarisierten Welle sind Schallwellen. Schall oder elastische Wellen in einem Stab, entstehen indem eine mikroskopische Menge von Atomen - etwa auf einer Ebene liegend - komprimiert wird. Es bildet sich in einem Volumenelement ein Überdruck, der die darausfolgende Menge von Atomen nach vorn befördert. Wie ein Domino breitet sich die ursprüngliche Kompression aus. Diese Kompression besteht aus einer Auslenkung der Atome aus ihrer Ruhelage, und zwar parallel zur Ausbreitungsrichtung. Schallwellen sind daher longitudinal polarisiert.

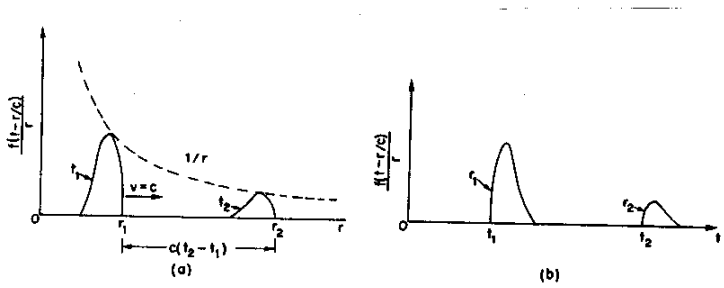
Beipiel 5: Die Ausbreitung von Wellen in drei Dimensionen.
Die Grundlage für die Ausbreitung von Wellen im dreidimensionalen Koordinatenraum ist die dreidimensionale Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial t^2} = c^2[\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial z^2}]$$

Eine sehr wichtige Lösung dieser Gleichung ist die ebene harmonische Welle $u(x,y,z,t) = A\cos(\vec{q}\vec{x} - \omega t)$, mit $\omega = c|\vec{q}|$. $\vec{q}$ ist der Wellenvektor. Alle Punkte $\vec{x}$ mit gleicher Auslenkung oder Phase liegen auf Ebenen mit der Gleichung $\vec{q}\vec{x} = Konst.$ Das sind Ebenen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung, die von $\vec{q}$ festgelegt ist. Neben den ebenen Wellen treten in der Physik zuweilen auch Wellen mit gekrümmten Flächen gleicher Phase auf, wie zum Beispiel Zylinder- oder Kugelwellen. Eine Kugelwelle, zum Beispiel, ist eine Welle, die einen kugelförmigen Wellenfront besitzt. Kugelwellen breiten sich typischerweise aus einer Punktquelle aus. Die allgemeine Form einer Kugelwelle, die sich vom Ursprung des Koordinatensystems mit Fortpflanzungsgeschwindigkeit c ausbreitet, finden wir als die Lösung der radialsymmetrischen Wellengleichung

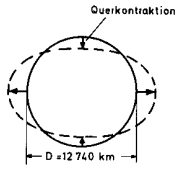
$$\frac{\partial^2 u(r,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[r\frac{\partial u(r,t)}{\partial r}]$$

Das ergibt: $u(r,t) = \frac{f(r \pm ct)}{r}$, wie durch direktes Einsetzen sichtbar wird. Vergessen wir für einen Augenblick den Faktor r im Nenner. Die Amplitude der Welle zu einer bestimmten Zeit hat dann als Funktion des Abstands vom Ursprung eine bestimmte Gestalt, die mit der Geschwindigkeit c vom Ursprung ausläuft (oder zum Ursprung hinläuft). Der Faktor r im Nenner sagt uns aber, da die Amplitude der Welle im Lauf der Ausbreitung proportional zu 1/r abnimmt. Mit anderen Worten: Während bei einer ebenen Welle die Amplitude während des Ausbreitungsvorgangs konstant bleibt, nimmt die Amplitude einer Kugelwelle stetig ab, wie es in der Figur dargestellt ist.



Eine Kugelwelle $\psi = f(t-r/c)/r$. (a) ψ als Funktion von r bei $t = t_1$ und dieselbe Welle zu einem späteren Zeitpunkt t_2. (b) ψ als Funktion von t bei $r = r_1$ und dieselbe Welle bei r_2.

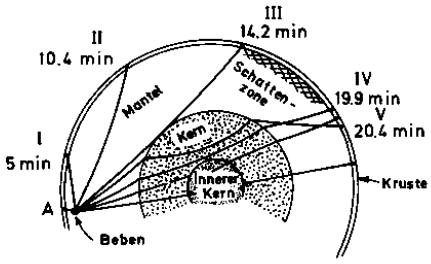
Beipiel 6: Akustische Wellen in der Geologie. Die Erde kann zu Eigenschwingungen angeregt werden, insbesondere bei Erdbeben. Die Grundschwingungsperiode beträgt rund 50 Minuten, was etwa der Zeit eines akustischen Hin- und Rücklaufs durch die Erde entspricht. Das Bild zeigt die Deformation der Erde (nicht massstabgetreu) bei einer solchen Schwingung zur Zeit t = 0 und 25 min später. Akustische Wellen sind aber auch ein leistungsfähiges Hilfsmittel zur Untersuchung des Erdinnern. Unsere Kenntnis vom Erdinnern stammt hauptsächlich von seismologischen Beobachtungen. Aus der Reisezeit und Reiseroute von Erdbebenwellen kann man den radialen Verlauf der Schallgeschwindigkeit im Erdinnern bestimmen: Das Bild zeigt z.B. die longitudinalen und transversalen Schallgeschwindigkeiten im Erdinnern. Deutlich sichtbar ist das Nullwerden der transversalen Geschwindigkeit und damit der Schersteifigkeit im Erdinnern, welches auf den flüssigen Zustand des Erdkerns hinweist. Die akustische Information zeigt aber nicht nur die Existenz und Abmessung des flüssigen Erdkerns, sondern darüber hinaus weitere Unstetigkeiten, auf die wir hier nur hinweisen wollen. (Zum Beispiel die mit F bezeichnete Unstetigkeit in 5 200 km Tiefe, welche eine weitere Phasenänderung flüssig - fest innerhalb des Erdkerns andeutet.)



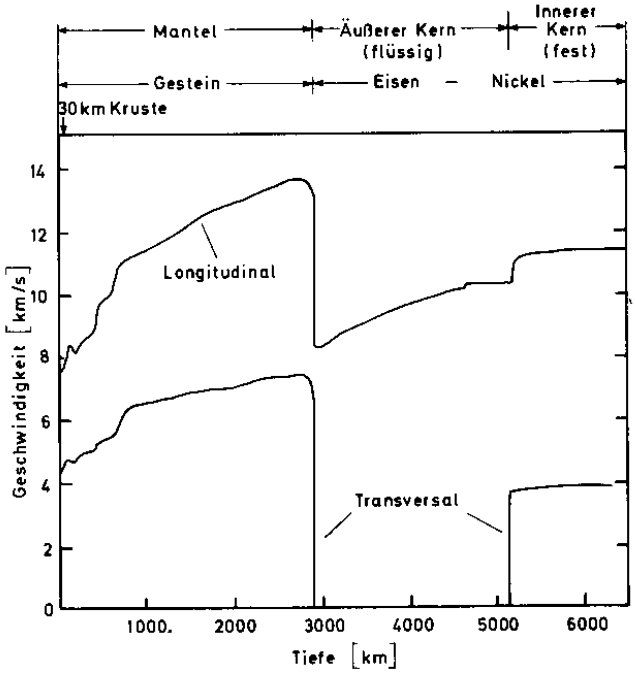
Eigenschwingung der Erde (Grundschwingung): die Periode der Grundschwingung beträgt entsprechend $\lambda/2 = D$ etwa 50 Minuten.

$\overline{v}_L \simeq 8000$ m/s

$\tau_e = \frac{2D}{\overline{v}_L} \simeq 3000$ s $\simeq 50$ min



Reiserouten von Erdbebenwellen vom Erdbebenzentrum zur Beobachtungsstation (entnommen: George Gamow, J. M. Cleveland, Physik in unserer Welt, Aries-Verlag, München, 1963).



Geschwindigkeiten longitudinaler und transversaler elastischer Wellen im Inneren der Erde: die Diskontinuitäten werden durch Änderung der chemischen Zusammensetzung bzw. durch Phasenänderungen verursacht. So wird die Mohorovičić-Diskontinuität, die Kruste und Mantel trennt, Modifikationen des Gesteins zugeschrieben. Der Übergang vom Mantel zum Kern wird durch den Phasenübergang fest - flüssig charakterisiert. Während sich im äußeren Kern keine Transversalwellen ausbreiten können, zeigen neuere Untersuchungen, daß dies im inneren Kern möglich ist: die Diskontinuität zwischen äußerem und innerem Kern deutet also auf Phasenübergang flüssig - fest hin (entnommen: B. Gutenberg, Physics of the Earth Interior, in International Geophysics Series, Vol. I, Academic Press, New York, 1959; B. A. Bolt, The Fine Structure of the Earth, Sci. Am. 228, March, 1973).